LXIV OLIMPIADA FIZYCZNA

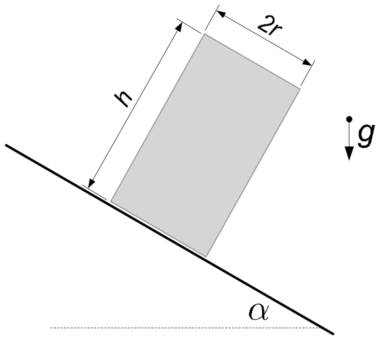
ZAWODY II STOPNIA

CZĘŚĆ TEORETYCZNA

Za każde zadanie można otrzymać maksymalnie 20 punktów.

Zadanie 1.

Na równi nachylonej do poziomu pod kątem α postawiono jednorodny walec o promieniu r i wysokości h. Współczynnik tarcia walca o równię wynosi f.



Jaki warunek (albo jakie warunki) muszą spełniać wymienione parametry, aby walec się nie przewrócił? Przy ustalonych wartościach parametrów r, h i f wyznacz zakres (lub zakresy) kątów α, dla których walec się nie przewróci.

Zadanie 2.

Metodą stosowaną w celu ustalenia położenia podwodnych gór jest wyznaczanie, za pomocą radaru umieszczonego na satelicie, anomalnego poziomu oceanu.

Dla uproszczenia, zamiast góry rozważymy kulę o promieniu R i gęstości ρ ($\rho > \rho_w$, gdzie ρ_w jest gęstością wody), spoczywającą na dnie oceanu znajdującym się na głębokości d ($d > 2R$).

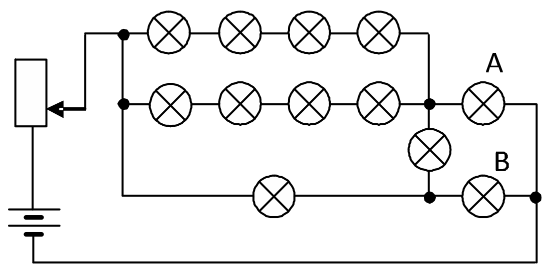
a) Wyznacz, o ile zmieni się średni (tzn. bez uwzględniania falowania i pływów) poziom oceanu dokładnie nad środkiem takiej góry (tzn. kuli) w porównaniu z sytuacją, gdyby góry nie było. Czy ten poziom będzie wyższy czy niższy niż w sytuacji, gdy góry nie ma?

b) O ile mniej lub więcej energii musi wydatkować statek o masie m, aby dopłynąć z daleka nad środek rozważanej góry, w porównaniu z sytuacją, gdyby jej nie było? Statek jest dużo mniejszy niż góra.

Podaj wartości liczbowe dla $d = 3000$ m, $R = 1400$ m, $\rho = 2500$ kg/m^3, $\rho_w = 1030$ kg/m^3. Uniwersalna stała grawitacyjna $G = 6{,}7 \cdot 10^{-11}$ m^3·kg^{-1}·s^{-2}, przyspieszenie ziemskie $g = 9{,}8$ m/s^2, $m = 10^8$ kg.

Możesz uwzględnić, że oczekiwana zmiana poziomu oceanu jest mała w porównaniu z R, a wartość niezaburzonego przyspieszenia ziemskiego nie zależy od wysokości nad poziomem morza. Pomiń wpływ na pole grawitacyjne zmiany kształtu powierzchni oceanu spowodowanej obecnością góry.

Zadanie 3.



W obwodzie przedstawionym na rysunku wszystkie żaróweczki są jednakowe. Zależność napięcia na żaróweczce od natężenia płynącego przez nią prądu jest dana wzorem

$$U(I) = \alpha I + \beta I^{\gamma} + \delta e^{\eta \cdot I},$$

gdzie α, β, γ, δ, η są nieujemnymi stałymi, natomiast e jest podstawą logarytmów naturalnych ($e \approx 2{,}71$).

Zauważono, że żaróweczka A świeci tak samo jasno jak żaróweczka B (tzn. moc wydzielana na A jest taka sama jak moc wydzielana na B), niezależnie od nastawienia regulowanego opornika. Podaj jakie warunki muszą spełniać stałe α, β, γ, δ, η, aby było to możliwe.

Rozwiązanie zadania 1.

Przyjmijmy, że masa walca wynosi m. Składowa siły ciężkości wzdłuż równi jest dana wzorem $F_z = mg\sin\alpha$, składowa siły ciężkości prostopadła do równi (czyli siła nacisku walca na równię) – wzorem $F_n = mg\cos\alpha$, a maksymalna siła tarcia – wzorem $F_t = fF_n = mgf\cos\alpha$.

a) Gdy $F_z \le F_t$, czyli gdy

$$f \ge \operatorname{tg}\alpha \tag{1}$$

klocek nie zsuwa się z równi. W tym przypadku moment siły obracający (przewracający) walec wokół osi przechodzącej przez najniższy punkt walca wynosi $\frac{h}{2}F_z = \frac{h}{2}mg\sin\alpha$, natomiast przeciwstawia się temu moment siły F_n równy $rF_n = rmg\cos\alpha$. Gdy walec się przewraca lub jest na granicy przewracania, siła reakcji równi jest przyłożona w najniższym punkcie walca; moment tej siły względem rozważanej osi jest równy 0. Oznacza to, że gdy

$$\frac{h}{2}F_z - rF_n = \frac{h}{2}mg\sin\alpha - rmg\cos\alpha > 0, \tag{2}$$

czyli gdy

$$\operatorname{tg}\alpha > \frac{2r}{h}, \tag{3}$$

walec zacznie się przewracać. Ponieważ ze wzrostem kąta nachylenia walca względem równi (i względem pionu) przewracający moment siły wzrasta, gdy powyższy warunek jest spełniony, walec się przewróci.

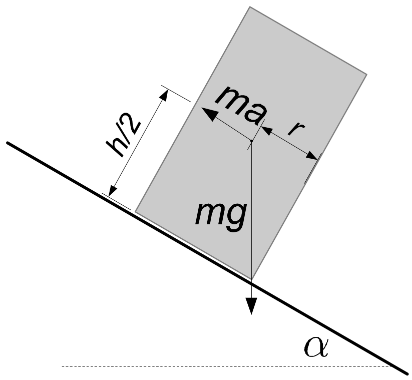
b) Gdy $F_z > F_t$, czyli gdy

$$f < \operatorname{tg}\alpha \tag{4}$$

klocek zsuwa się z równi.

Tak jak w przypadku a) składowa siły ciężkości, działająca wzdłuż równi, jest dana wzorem $F_z = mg\sin\alpha$, natomiast siła tarcia – wzorem $F_t = mgf\cos\alpha$. Przyspieszenie walca wzdłuż równi wynosi

$$a = \frac{F_z - F_t}{m} = g\left(\sin\alpha - f\cos\alpha\right). \tag{5}$$



W nieinercjalnym układzie odniesienia związanym z walcem działają na niego siły przedstawione na rysunku, oraz nienarysowane siły reakcji i tarcia podłoża. Wzdłuż równi na środek walca działa więc siła $F_w = mg\sin\alpha - ma = mgf\cos\alpha$, a prostopadle do równi – jak poprzednio siła $F_n = mg\cos\alpha$. Są to jedyne siły, które dają wkład do momentu obracającego (przewracającego) walec wokół osi przechodzącej przez najniższy punkt walca (w chwili przewracania lub na granicy przewracania). Ten moment siły wynosi

$$F_w\frac{h}{2} - F_n r = \left(f - \frac{2r}{h}\right) mgh\cos\alpha. \tag{6}$$

Gdy powyższe wyrażenie jest dodatnie, czyli gdy

$$f > \frac{2r}{h}, \tag{7}$$

walec się przewróci.

Podsumowując:

Walec nie przewróci się

$$\text{gdy } f \geq \operatorname{tg}\alpha \text{ oraz } \operatorname{tg}\alpha \leq \frac{2r}{h}, \tag{8}$$

$$\text{lub gdy } f < \operatorname{tg}\alpha \text{ oraz } f \leq \frac{2r}{h}. \tag{9}$$

Dla $f = \operatorname{tg}\alpha$ oba powyższe warunki są identyczne. Zauważmy, że gdy $f \leq \frac{2r}{h}$, to z $f \geq \operatorname{tg}\alpha$ wynika, że $\operatorname{tg}\alpha \leq \frac{2r}{h}$. Zatem dla $f \leq \frac{2r}{h}$ zawsze będzie spełniony jeden z warunków (8, 9). Gdy $f > \frac{2r}{h}$, aby walec się nie przewrócił musi być spełniony warunek (8), który w tym przypadku sprowadza sie do $\operatorname{tg}\alpha \leq \frac{2r}{h}$. Zatem warunki nie przewracania się się walca można zapisać w prostszej postaci

$$f \leq \frac{2r}{h}, \tag{10}$$

$$\text{lub } \operatorname{tg}\alpha \leq \frac{2r}{h}. \tag{11}$$

Zgodnie z oczekiwaniem, im większe h, tym łatwiej walec się przewraca, im mniejsze f – tym trudniej.

Aby wyznaczyć szukany zakres kątów α, korzystamy z tych samych warunków.

Gdy $f \leq \frac{2r}{h}$, to z powyższych warunków wynika, że zarówno dla $\operatorname{tg}\alpha > f$ (zsuwanie), jak i dla $\operatorname{tg}\alpha \leq f$ (wtedy również $\operatorname{tg}\alpha \leq \frac{2r}{h}$) walec się nie nie przewróci

Gdy $f > \frac{2r}{h}$ to w przypadku zsuwania walec się przewróci, czyli aby się nie przewrócił, musi być $\operatorname{tg}\alpha \leq \frac{2r}{h}$. Zatem szukany zakres kątów jest następujący

$$0 \leq \alpha < 90^{\circ} \quad \text{gdy} \quad f \leq \frac{2r}{h}, \tag{12}$$

$$0 \leq \alpha \leq \operatorname{tg}\alpha_{\max}, \text{ gdzie } \operatorname{tg}\alpha_{\max} = \frac{2r}{h}, \;\; \text{gdy} \quad f > \frac{2r}{h}. \tag{13}$$

Punktacja zadania 1.

Zauważenie, że mamy do czynienia z dwiema możliwościami (zsuwanie lub nie) – 1 pkt.

Warunek zsuwania się (wzór (1)) lub nie zsuwania się walca (wzór (4)) – 1 pkt.

Prawidłowa analiza momentów sił w przypadku a) – 1 pkt.

Warunek nie przewracania się w przypadku a) (wzór (8) lub równoważny) – 1 pkt.

Prawidłowa analiza momentów sił w przypadku b) – 2 pkt.

Warunek nie przewracania się w przypadku b) (wzór (9) lub równoważny) – 1 pkt.

Zakresy kątów, przy kórych walec się nie przewróci (warunki (12) oraz (13) lub równoważne) – 3 pkt.

Rozwiązanie zadania 2.

a) Rozważmy małe ciało o masie m. Nasza góra powoduje dodatkowe oddziaływanie grawitacyjne o energii

$$E_g = -\frac{GM'm}{r}, \tag{14}$$

gdzie $M' = 4\pi R^3 (\rho - \rho_w)/3$, r jest odległością ciała od środka kuli.

Na wysokości h nad niezaburzonym poziomem oceanu energia grawitacyjna rozważanego ciała wynosi

$$E = m\left(gh - \frac{GM'}{d-R+h}\right). \tag{15}$$

przy czym przyjęliśmy, że na poziomie niezaburzonego oceanu ta energia jest równa 0.

W dowolnym punkcie na powierzchni (spokojnej) wody powyższa energia musi być taka sama - inaczej woda przepływałaby do miejsca o niższej energii. Zatem nad górą woda będzie na takiej wysokości, by powyższa energia była równa 0. Oznacza to, że szukane h spełnia warunek

$$gh - \frac{GM'}{d-R+h} = 0. \tag{16}$$

Oczekujemy, że $h \ll d - R$, zatem w pierwszym przybliżeniu

$$h = \frac{G}{g\left(d-R\right)} 4\pi R^3 \left(\rho - \rho_w\right)/3. \tag{17}$$

Jest to wartość dodatnia, zatem podwodna góra powoduje powstanie nad sobą górki wody.

Podstawiając dane liczbowe dostaniemy

$$h = 0,07 \text{ m}. \tag{18}$$

b) Zgodnie z powyższym rozumowaniem, potencjalna energia grawitacyjna ciała jest taka sama w dowolnym miejscu na powierzchni wody. Zatem żadna dodatkowa energia nie jest potrzebna, żeby wpłynąć na powstałą górkę.

Punktacja zadania 2.

a)

Potencjał grawitacyjny góry (równanie (14) wraz z definicją M' lub wzór równoważny) – 2 pkt.

Energia grawitacyjna małej masy m (równanie (15) lub równoważne) – 1 pkt.

Warunek, że energia grawitacyjna małej masy m ma być równa 0 (lub warunek równoważny, może być sformułowany opisowo) – 2 pkt.

Wynik końcowy (równanie (17) lub równoważne) – 2 pkt.

Wynik liczbowy – 1 pkt.

b) Zauważenie i uzasadnienie, że szukana energia jest równa 0 – 2 pkt.

Rozwiązanie zadania 3.

Jeśli A i B świecą tak samo jasno, to napięcia na nich są jednakowe, czyli napięcie na żaróweczce w gałęzi pionowej sąsiadującej z nimi jest równe 0. Zatem nie płynie przez nią prąd, a przez żaróweczkę położoną w gałęzi poziomej na lewo od B (oznaczmy ją C) płynie ten sam prąd, co przez B i A. Przez każdą z pozostałych 8 żaróweczek płynie prąd o natężeniu równym połowie natężenia prądu przepływającego przez A. Napięcie na każdej z tych 8 żaróweczek jest równe $\frac{1}{4}$ napięcia na C, więc

$$U\left(I\right) = 4U\left(\frac{I}{2}\right) \tag{19}$$

Podstawiając do podanego wzoru na U otrzymujemy, że dla dowolnego (dodatniego) I powinno zachodzić

$$\alpha I + \beta I^{\gamma} + \delta e^{\eta \cdot I} = 2\alpha I + 4 \cdot 2^{-\gamma}\beta I^{\gamma} + 4\delta e^{\eta \cdot I/2}. \tag{20}$$

Dla bardzo małych I powyższe równanie sprowadza się do

$$\delta = 4\delta,$$

co oznacza, że δ musi być równe 0 (a wtedy wartość η nie ma znaczenia). Uwzględniając to, warunek (20) można przepisać w postaci

$$\alpha + \left(2^{2-\gamma} - 1\right)\beta I^{\gamma-1} = 0.$$

Zauważmy, że dla $\gamma = 1$ otrzymujemy $a = -b$, co prowadzi do U stale równego 0. Dla $\gamma \neq 1$ spełnienie powyższego równania dla dowolnego I (a zatem również dowolnego $I^{\gamma-1}$) oznacza, że $\alpha = 0$ oraz $(2^{2-\gamma} - 1)\,\beta = 0$. Ponieważ $\alpha = 0$ oraz $\beta = 0$ odpowiada U stale równemu 0, jedynym nietrywialnym rozwiązaniem jest

$$\alpha = 0,\ \delta = 0,\ \gamma = 2,\ \beta,\ \eta \text{ – dowolne.} \tag{21}$$

Czyli w rozważanej sytuacji U ma postać

$$U\left(I\right) = \beta I^2, \tag{22}$$

gdzie β jest dowolne dodatnie.

Punktacja zadania 3.

Ustalenie, że przez żarówkę na pionowej gałęzi nie płynie prąd – 2 pkt.

Ustalenie, że przez każdą z 8 żaróweczek znajdujących się na dwóch górnych gałęziach płynie prąd dwa razy mniejszy niż przez żarówkę C na dolnej gałęzi – 1 pkt.

Ustalenie, że na każdej z 8 żaróweczek znajdujących się na dwóch górnych gałęziach napięcie jest cztery razy mniejsze niż na żarówce C – 1 pkt.

Wzór (19) lub równoważny– 3 pkt.

Rozwiązanie w postaci wzoru (22) lub ustalenie, że $\alpha = 0,\ \delta = 0,\ \gamma = 2,$ natomiast $\beta,\ \eta$ są dowolne – 3 pkt.