

LXXVI OLIMPIADA FIZYCZNA

ROZWIĄZANIA ZADAŃ ZAWODÓW I STOPNIA

CZĘŚĆ I

ZADANIA CZĘŚCI I (termin wysyłania rozwiązań — 9 października 2026 r.) Przy rozwiązywaniu wszystkich zadań możesz korzystać z Internetu, pamiętaj jednak, że nie wszystkie znalezione tam informacje są prawdziwe.

CZĘŚĆ TESTOWA

Zadanie W1

Wiadomo, że małe ciało zsuwające się bez tarcia i bez oporu powietrza z półsfery w którymś momencie się od niej oderwie. Rozważmy zamiast półsfery górną część paraboloidy obrotowej o osi skierowanej pionowo. Paraboloida ta przecina się z poziomym podłożem tworząc okrąg o promieniu $r = 1$ m. Jaka jest największa wysokość takiej paraboloidy, przy której zsuwające się z wierzchołka ciało nie oderwie się od niej? Przyspieszenie ziemskie wynosi $g = 9,81$ m/s². Prędkość początkowa ciała (na wierzchołku paraboloidy) jest bardzo mała.

Możesz wykorzystać fakt, że promień krzywizny paraboli (czyli promień okręgu, po którym chwilowo porusza się ciało poruszające się po tej paraboli) $y(x) = ax^2 + b$ jest w punkcie $(x, y(x))$ równy $R = (1 + 4a^2x^2)^{3/2}/(2a)$, natomiast sinus kąta nachylenia normalnej do tej paraboli do osi x w tym punkcie wynosi $1/\sqrt{1 + 4a^2x^2}$.

Wybierz jedną odpowiedź:

- mniejsza niż 0,1 m
- nie mniejsza niż 0,1 m, ale mniejsza od 0,5 m
- nie mniejsza niż od 0,5 m, ale mniejsza od $2/3$ m
- nie mniejsza niż $2/3$ m, ale mniejsza od 1 m
- nie mniejsza niż 1 m, ale mniejsza od 2 m
- nie mniejsza niż 2 m, ale mniejsza od 5 m
- nie mniejsza niż 5 m, ale mniejsza od 10 m
- większa od 10 m lub nie oderwie się dla dowolnie dużej wysokości

Rozwiązanie zadania W1

Założmy, że ciało nie odrywa się od paraboli. Jeśli równanie paraboli ma postać $y(x) = ax^2 + b$, to z zasady zachowania energii na wysokości y prędkość ciała jest równa (zauważmy, że jeśli paraboloida ma wierzchołek, to a musi być ujemne)

$$v = \sqrt{-2ax^2g}.$$

Z tego wynika, że (w układzie nieinercyjnym związanym z ciałem) przyspieszenie odśrodkowe ciała w tym punkcie jest równe

$$\begin{aligned} a_{\text{ods}} &= v^2/R = \\ &= \frac{4a^2x^2g}{(1+4a^2x^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Normalna do paraboli składowa przyspieszenia grawitacyjnego jest równa

$$g_n = -g \frac{1}{\sqrt{1+4a^2x^2}}.$$

Ciało będzie dążyło do oderwania jeśli

$$g_n + a_{\text{ods}} \geq 0,$$

ale

$$\begin{aligned} g_n + a_{\text{ods}} &= \frac{4a^2x^2g}{(1+4a^2x^2)^{3/2}} - g \frac{1}{\sqrt{1+4a^2x^2}} = \\ &= -g \frac{1}{(1+4a^2x^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

To jest wielkość ujemna, zatem ciało nigdy się nie oderwie od podłoża.

Zauważmy, że analogiczne rozumowanie w przypadku okręgu prowadzi do

$$\begin{aligned} a_{\text{ods}} &= \frac{2(R-y)g}{R}, \\ g_n &= -g \frac{y}{R}, \end{aligned}$$

gdzie y jest wysokością powyżej środka okręgu. Zatem w przypadku okręgu otrzymamy warunek na punkt oderwania

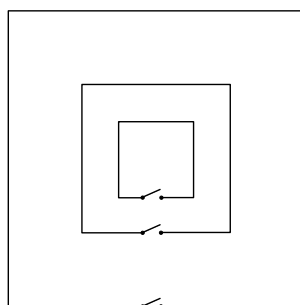
$$\frac{2(R-y)g}{R} - g \frac{y}{R} = 0,$$

czyli

$$y = \frac{2}{3}R.$$

Zadanie W2

Rozważmy trzy leżące w jednej płaszczyźnie kwadratowe ramki z przewodników o bokach równych a , $2a$ oraz $4a$. Środki ramek się pokrywają, patrz rysunek.



Gdy przez wewnętrzną (najmniejszą) ramkę płynie przemienny prąd o natężeniu $I = I_0 \cos \omega t$ (I_0 oraz ω są stałymi, a t jest czasem), a pozostałe dwa obwody są rozwarte, to na środkowej ramce indukuje się siła elektromotoryczna o amplitudzie U_0 . Jaka będzie amplituda siły elektromotorycznej na zewnętrznej ramce, gdy przez środkową będzie płynął prąd o natężeniu $I = 2I_0 \cos 2\omega t$, a obwody zewnętrzne i wewnętrzny będą rozwarte? Przyjmij, że układ znajduje się w próżni.

Wybierz jedną odpowiedź:

- U_0
- $2U_0$
- $3U_0$
- $4U_0$
- $8U_0$
- $U_0/2$
- $U_0/4$

Rozwiązanie zadania W2

Zgodnie z prawem Faradaya, indukowana siła elektromotoryczna jest związana ze strumieniem indukcji magnetycznej Φ wzorem

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= -\frac{d\Phi}{dt} = \\ &= -L\frac{dI}{dt},\end{aligned}$$

gdzie L (współczynnik indukcji, w naszym przypadku współczynnik indukcji wzajemnej) jest wielkością zależną od geometrii układu, ale niezależną od natężenia płynącego prądu. W próżni współczynnik indukcji musi być proporcjonalny do przenikalności magnetycznej próżni μ_0 , tzn. $L = \mu_0 l$. Z rozważań wymiarowych wynika, że l jest proporcjonalne do rozmiarów liniowych układu, zatem w drugim przypadku (zewnętrzna ramka względem środkowej) współczynnik indukcji wzajemnej jest dwa razy większy niż w przypadku pierwotnym (środkowa ramka względem wewnętrznej). Biorąc pod uwagę postać natężenia prądu w drugim przypadku, oznacza to, że amplituda siły elektromotorycznej w drugim przypadku wynosi $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot U_0 = 8U_0$.

Do takiego samego wniosku można też dojść nieco inaczej:

Przebieg linii pola dla większej ramki R i dwukrotnie mniejszej ramki S o tym samym kształcie jest taki sam – różni się tylko skalą rysunku. Jeśli natężenie prądu w tych ramkach byłoby jednakowe, to w każdym punkcie wewnątrz i na zewnątrz ramki R indukcja B byłaby dwukrotnie mniejsza od indukcji w odpowiednim punkcie wokół ramki S (fakt ten jest analogiczny do znanej zależności $B \sim 1/r$ dla pola przewodnika prostoliniowego). Gdy na zewnątrz ramki R umieszczona jest ramka P o rozmiarach dwukrotnie większych od R, a na zewnątrz S – ramka R, to – ponieważ pole powierzchni ramki R jest czterokrotnie mniejsze od pola powierzchni P – strumień pola magnetycznego przez P jest $4/2 = 2$ razy większy od strumienia przez R. Porównując ten opis z treścią zadania stwierdzamy, że dla jednakowych prądów amplituda SEM na zewnętrznej ramce byłaby równa $2U_0$, a po uwzględnieniu większej amplitudy i częstotliwości amplituda SEM na zewnętrznej ramce jest równa $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot U_0 = 8U_0$.

Zadanie W3

Zbudowano dwa roboty, które nazwano *mały Michał* oraz *duży Michał*. Mały Michał jest kopia dużego Michała w skali 1:2, tzn. wszystkie części małego Michała mają dwa razy mniejsze rozmiary liniowe niż odpowiednie części dużego Michała.

Przyjmij, że „mięśnie” to pneumatyczne siłowniki składające się z cylindra i tłoka, podłączone do dużego (o pojemności znacznie większej, niż pojemność cylindra) zbiornika powietrza tak, że ciśnienie w cylindrze jest stałe i takie samo w przypadku obu Michałów. (Oczywiście powietrze w zbiorniku jest stale uzupełniane przez pompę napędzaną silnikiem elektrycznym.)

Duży Michał jest w stanie podskoczyć na wysokość 1 m (tzn. o tyle maksymalnie może wznieść się jego środek masy wyniku wyskoku) i jest w stanie wykonać 1000 pompek (do wyczerpania baterii; nie ma odzyskiwania energii).

Na jaką wysokość h jest w stanie podskoczyć mały Michał (tzn. o ile maksymalnie może wznieść się jego środek masy wyniku wyskoku)? Ile pompek n jest w stanie wykonać?

Wybierz jedną odpowiedź (jeśli uważasz, że odpowiedź jest inna niż przedstawiona, to wybierz odpowiedź najbliższą twojej odpowiedzi, np. dla $h = 1,41$ m wybierz 1 m):

- $h = 0,5$ m, $n = 500$
- $h = 0,5$ m, $n = 1000$
- $h = 0,5$ m, $n = 2000$
- $h = 1$ m, $n = 500$
- $h = 1$ m, $n = 1000$
- $h = 1$ m, $n = 2000$
- $h = 2$ m, $n = 500$
- $h = 2$ m, $n = 1000$
- $h = 2$ m, $n = 2000$

Rozwiązanie zadania W3

Ponieważ w obu przypadkach ciśnienie wewnątrz tłoków jest takie samo, siła „mięśni” małego Michała jest cztery razy mniejsza, niż siła „mięśni” dużego Michała; jednocześnie skok tłoka jest dwa razy mniejszy. W sumie, praca jaką może wykonać mały Michał w trakcie wyskoku jest 8 razy mniejsza, niż w przypadku dużego Michała. Jednocześnie mały Michał jest $2^3 = 8$ razy lżejszy niż duży, zatem wysokość na jaką może podskoczyć, jest taka sama jak w przypadku dużego Michała.

W przypadku jednej pompki, praca wykonana przez małego Michała jest $2 \cdot 8$ (zmiana wysokości środka masy $\times$ ciężar) czyli 16 razy mniejsza, niż w przypadku dużego Michała. Jednocześnie pojemność baterii małego Michała jest 8 razy mniejsza, niż pojemność baterii dużego Michała (bo jest 8 razy – objętościowo – mniejsza). Zatem mały Michał może wykonać dwa razy więcej pompek niż duży, czyli 2000.

Zadanie W4

W ramach Nowej Polityki Klimatyczno-Ekonomicznej postanowiono roztopić lód na Grenlandii aby uczynić ją naprawdę zieloną (zgodnie z nazwą). W tym celu rozważa się przykrycie lądolodu na tej wyspie czarną warstwą ekologicznej sadzy, tak, by świecące słońce go roztopiało. Przyjmując, że powierzchnia rozważnego lądolodu wynosi $S = 1,7 \cdot 10^6 \text{ km}^2$, średnia roczna energia słońca padająca na jednostkę powierzchni lądolodu jest równa $P = 900 \text{ kWh}/(\text{m}^2 \cdot \text{rok})$ i zakładając, że cała padająca energia jest zużywana na topnienie lodu, wyznacz o ile zmniejszy się grubość warstwy lądolodu po jednym roku. Pomiń ogrzewanie oraz oziębianie otoczenia przez lód, a w szczególności jego promieniowanie. Pomiń też ewentualne ponowne zamarzanie wody. Przyjmij, że sadza nie spływa wraz z wodą. Ciepło topnienia lodu wynosi $c_t = 334 \text{ kJ/kg}$, a jego gęstość $\rho = 0,91 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$.

Wybierz jedną odpowiedź:

- mniej niż 10 cm
- nie mniej niż 10 cm, ale mniej niż 5 m
- nie mniej niż 5 m, ale mniej niż 15 m
- nie mniej niż 15 m, ale mniej niż 50 m
- nie mniej niż 50 m ale mniej niż 150 m
- nie mniej niż 150 m, ale mniej niż 500 m
- więcej niż 500 m

Rozwiązanie zadania W4

Energia słoneczna padająca na lądolód w ciągu czasu T to

$$E = TSP.$$

Przyjmując, że cała ta energia jest zużywana na roztopienie lodu (co jest oczywiście bardzo grubym założeniem), spowoduje to roztopienie lodu o masie

$$M = \frac{TSP}{c_t}.$$

Zatem grubość roztopionej warstwy wyniesie

$$d = \frac{TP}{c_t}.$$

Dla $T = 1$ rok otrzymamy

$$d = \frac{TP}{c_t \rho} \approx 11 \text{ m}.$$

Zatem prawidłową odpowiedzią jest: nie mniej niż 5 m, ale mniej niż 15 m.

Zadanie W5

Elektron rozpędzono przy pomocy pewnej różnicy potencjałów do prędkości $c/2$. Do jakiej prędkości zostałby rozpędzony ten elektron, gdyby różnica potencjałów była dwa razy większa? Pomiń straty energii związane z promieniowaniem.

Wybierz jedną odpowiedź:

- c
- $> 0,5c$ oraz $\leq 0,6c$
- $> 0,6c$ oraz $\leq 0,7c$
- $> 0,7c$ oraz $\leq 0,8c$
- $> 0,8c$ oraz $\leq 0,9c$
- $> 0,9c$ oraz $< c$

Rozwiązanie zadania W5

Całkowita energia elektronu po rozpędzeniu przy pomocy różnicy potencjałów U jest równa

$$E = mc^2 + eU,$$

gdzie e jest wartością bezwzględną ładunku elektronu, a m jego masą.

Z drugiej strony całkowita energia cząstki poruszającej się z prędkością v jest równa

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (1)$$

Dla $v = c/2$ otrzymamy

$$E = mc^2 \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Stąd

$$eU = mc^2 \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} - 1 \right) \approx 0,1547mc^2.$$

Dla dwa razy większej różnicy potencjałów energia całkowita będzie wynosić

$$\begin{aligned} E_2 &= mc^2 + 2eU = \\ &= mc^2 \left(\frac{4\sqrt{3}}{3} - 1 \right). \end{aligned}$$

Odpowiadającą temu prędkość można otrzymać ze wzoru odwrotnego do wzoru (1)

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{1 - \left(\frac{mc^2}{E_2} \right)^2} c \approx \\ &\approx 0,646c. \end{aligned}$$

Zatem prawidłową odpowiedzią jest: $> 0,6c$ oraz $\leq 0,7c$.

CZĘŚĆ NUMERYCZNA

Zadanie N1

W związku z robotami drogowymi na pewnym odcinku drogi postanowiono zmniejszyć dopuszczalną prędkość z $V_1 = 105$ km/h do $V_2 = 67$ km/h. O ile procentowo zmniejszy się przepustowość jednego pasa tej drogi zakładając, że kierowcy poruszają się z maksymalną dopuszczalną prędkością, a odstęp między kolejnymi pojazdami jest dokładnie zgodny z przepisami (tzn. równy w metrach połowie prędkości w km/h), a długość każdego pojazdu wynosi $l_0 = 5$ m.

Przepustowość drogi to liczba samochodów przejeżdżających przez dany punkt drogi w jednostce czasu.

Rozwiązanie zadania N1

Oznaczmy przez $\{V\}$ liczbę odpowiadającą prędkości V w km/h, przez $\{l_0\}$ liczbę odpowiadającą średniej długości samochodu w metrach. Na odcinku długości L mieści się

$$n = \frac{\{L\}}{\{V\}/2 + \{l_0\}}$$

samochodów, z których każdy porusza się z prędkością V , a więc przejeżdża ten odcinek w czasie

$$T = \frac{L}{V}.$$

Zatem przepustowość drogi jest równa

$$\frac{n}{T} = \frac{\{V\} \cdot 1000}{\{V\}/2 + \{l_0\}} = \frac{2000}{1 + 2 \cdot \{l_0\}/\{V\}}$$

Powyżej liczba 1000 odpowiada przelicznikowi z km na m. Dla $l_0 = 5$ m, $V_1 = 105$ km/h otrzymamy przepustowość 1826 samochodów na godzinę, dla $l_0 = 5$ m, $V_2 = 67$ km/h przepustowość 1740 samochodów na godzinę. To oznacza spadek przepustowości o 86 samochodów na godzinę, czyli o 4,7%.

Zadanie N2

Dwa samoloty lecą w przeciwne strony po równoległych do siebie, prostoliniowych torach z prędkością $v = 206$ m/s względem powietrza. Odległość między tymi torami wynosi $d = 226$ m. Jeden z samolotów wysyła dźwięk o częstotliwości f_0 (tzn. taka jest częstotliwość drgań membrany głośnika generującego ten dźwięk). Wyznacz iloraz f_1/f_0 , gdzie f_1 jest częstotliwością dźwięku odbieranego przez drugi samolot w chwili, gdy samoloty są w najbliższej od siebie odległości.

Przyjmij, że prędkość dźwięku w powietrzu wynosi $v_0 = 340$ m/s.

Rozwiązanie zadania N2

Oznaczmy przez T czas przelotu dźwięku od momentu wysłania go przez samolot 1 do momentu odebrania przez samolot 2. Samolot przeleci w tym czasie odległość $l = Tv$, natomiast dźwięk odległość $s = Tv_0$. Z geometrii zagadnienia

$$s = \sqrt{l^2 + d^2},$$

a zatem kąt α między kierunkiem, z którego nadleciał dźwięk (nazwijmy go sygnałem) odpowiadający rozważanej sytuacji, a torem samolotu spełnia związek

$$\cos \alpha = \frac{l}{s} = \frac{v}{v_0}.$$

W momencie wysłania sygnału prędkość zbliżania się samolotu 1 do punktu, w którym znalazł się samolot 2 w momencie odebrania sygnału wynosi

$$v_1 = v \cos \alpha.$$

W momencie odebrania sygnału, składowa prędkość samolotu 2 w kierunku sygnału wysłanego przez samolot 1 wynosi również $v \cos \alpha$.

Korzystając ze wzoru Dopplera otrzymamy

$$\frac{f}{f_0} = \frac{v_0 + v_1}{v_0 - v_1} = \frac{v_0 + v^2/v_0}{v_0 - v^2/v_0} = \frac{v_0^2 + v^2}{v_0^2 - v^2}.$$

Zauważmy, że ten wynik nie zależy od d (pod warunkiem, że $d \neq 0$). Dla $v_0 = 340$ m/s oraz $v = 206$ m/s otrzymamy

$$\frac{f}{f_0} = 2,16.$$

Zadanie N3

Pan Marek wyjechał na zimowisko wyłączając dla oszczędności wszystkie źródła ciepła w mieszkaniu. Jaka będzie temperatura w mieszkaniu po jego powrocie, zakładając, że temperatura w sąsiednich mieszkaniach (obok, powyżej i poniżej) wynosi $t_1 = 24$ °C, a temperatura na zewnątrz $t_2 = -13$ °C? Przyjmij, że każde mieszkanie to prostopadłościan o wysokości $h = 2,4$ m, szerokości $s = 8$ m oraz głębokości (patrząc z zewnątrz, tzn. zza okien mieszkania) $d = 6$ m; te prostopadłościany stykają się ze sobą, a jedna ściana – o wymiarach $h \times s$ jest ścianą zewnętrzną. Współczynnik przenikania ciepła dla ścian między mieszkaniami jest równy $k_w = 1,76$ W/(K · m²), efektywny współczynnik przenikania ciepła dla ścian zewnętrznych (z uwzględnieniem okien) $k_z = 0,16$ W/(K · m²), a współczynnik przenikania ciepła dla stropów $k_s = 0,33$ W/(K · m²). Przyjmij, że temperatura wewnątrz mieszkania jest taka sama w każdym miejscu. Rozważane mieszkanie sąsiaduje z 3 innymi mieszkaniami na tym samym piętrze, a powyżej i poniżej niego też są mieszkania. Zakładamy, że przez pewien czas przed powrotem pana Marka, temperatura w jego mieszkaniu (już) nie ulegała zmianie.

Współczynnik przenikania ciepła przez przegrodę jest zdefiniowany jako

$$k = \frac{q}{S\Delta T},$$

gdzie q jest strumieniem ciepła (ilością przepływającego ciepła w jednostce czasu) przez przegrodę, S – polem powierzchni przegrody, a ΔT – różnicą temperatur po obu stronach przegrody. Zakładamy tu sytuację stacjonarną, tzn. temperatury po obu stronach przegrody oraz ustalonych punktach wewnątrz przegrody nie ulegają zmianie.

Rozwiązanie zadania N3

Oznaczmy przez t_3 temperaturę w mieszkaniu pana Marka.

Strumień ciepła wypływającego z jego mieszkania jest równy

$$J_{wy} = k_z (t_3 - t_2) sh,$$

natomiast strumień ciepła wpływającego wynosi

$$J_{wp} = (t_1 - t_3) (k_w h (s + 2d) + 2k_s sd).$$

Ponieważ w stanie stacjonarnym

$$J_{wy} = J_{wp},$$

otrzymamy

$$(k_z sh + k_w h (s + 2d) + 2k_s sd) t_3 = t_2 k_z sh + t_1 (k_w h (s + 2d) + 2k_s sd),$$

czyli

$$t_3 = \frac{t_2 k_z sh + t_1 (k_w h (s + 2d) + 2k_s sd)}{k_z sh + k_w h (s + 2d) + 2k_s sd}.$$

Dla $k_w = 1,76 \text{ W}/(\text{K} \cdot \text{m}^2)$, $k_z = 0,16 \text{ W}/(\text{K} \cdot \text{m}^2)$, $k_s = 0,33 \text{ W}/(\text{K} \cdot \text{m}^2)$, $t_1 = 24 \text{ }^\circ\text{C}$, $t_2 = -13 \text{ }^\circ\text{C}$, $h = 2,4 \text{ m}$, $s = 8 \text{ m}$, $d = 6 \text{ m}$ otrzymamy

$$t_3 = 23,05 \text{ }^\circ\text{C}.$$

Tak wysoka temperatura wynika z tego, że wartość $k_z = 0,16 \text{ W}/(\text{K} \cdot \text{m}^2)$ odpowiada bardzo dobrym właściwościom izolacyjnym zewnętrznych ścian mieszkania pana Marka. Jeśli zmienimy wartość k_z na $k_z = 1,0 \text{ W}/(\text{K} \cdot \text{m}^2)$, to otrzymamy

$$t_3 = 18,7 \text{ }^\circ\text{C}.$$

W tym drugim przypadku obliczmy dodatkowo, jaką kwotę pan Marek powinien zwrócić sąsiadom, jeśli miesięcznie płaci za ogrzewanie 500 zł, wyjechał na pół miesiąca, a opłata za ogrzewanie jest proporcjonalna do ilości energii zużytej na ogrzewanie? Pominiemy czas chłodzenia oraz powtórnego ogrzewania mieszkania.

Jeśli płacił 500 zł za ogrzewanie, to powinien zwrócić sąsiadom (dla $t_3 = 18,7 \text{ }^\circ\text{C}$)

$$\frac{1}{2} \frac{t_3 - t_2}{t_1 - t_2} 500 = 225,7 \text{ zł}.$$

To, że kwota ta jest niższa od $500/2 \text{ zł}$, wynika z tego, że w trakcie jego nieobecności temperatura w jego mieszkaniu była obniżona, a zatem strumień ciepła wypływający do otoczenia był niższy niż zwykle. Co ciekawe, z powyższego wzoru wynika, że im niższą temperaturę w mieszkaniu miał pan Marek, tym mniej powinien zwrócić sąsiadom. Zauważmy jednak, że temperatura w mieszkaniu pana Marka nie jest zmienną niezależną; np. temperatura w jego mieszkaniu byłaby równa temperaturze otoczenia tylko gdyby ściany oddzielające go od sąsiadów idealnie izolowały ciepło – wtedy rzeczywiście nie musiałby nic zwracać sąsiadom.

Zadanie N4

Malutka żabka siedzi w pobliżu walcowatej, nieruchomej butelki o promieniu $R = 4,6$ cm leżącej na poziomym podłożu. Żabka chce przeskoczyć butelkę prostopadle do jej osi, tak by przelecieć tuż nad nią, a jednocześnie zużyć jak najmniej energii na ten skok (tzn. żeby jej prędkość początkowa była jak najmniejsza). Jaka powinna być prędkość początkowa (wartość) żabki w skoku, zakładając, że wyskakuje z optymalnie wybranego miejsca. Pomiń rozmiary żabki w porównaniu z R .

Przyspieszenie ziemskie $g = 9,81$ m/s.

Rozwiązanie zadania N4

Prędkość żabki tuż nad butelką (na wysokości h) powinna być nie mniejsza niż prędkość przy której w ruchu po okręgu o promieniu R przyspieszenie dośrodkowe wynosi g , zatem

$$\frac{v_x^2}{R} = g,$$

czyli

$$v_x = \sqrt{gR}.$$

W trakcie lotu (skoku) pozioma prędkość żabki się nie zmniejsza, natomiast pionowa jest ruchem z przyspieszeniem g . Zatem czas lotu żabki do osiągnięcia najwyższego punktu jest równy

$$t = \sqrt{\frac{4R}{g}}.$$

W tym czasie żabka przebędzie drogę

$$\begin{aligned} s &= v_x t = \\ &= 2R, \end{aligned}$$

natomiast jej prędkość początkowa powinna wynosić

$$v_p = \sqrt{v_x^2 + g^2 t^2} = \sqrt{5} v_x = \sqrt{5gR}.$$

Dla podanych wartości liczbowych otrzymamy

$$v_p = 1,50 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Zadanie N5

Rowerzysta jest w stanie jechać z prędkością $V_1 = 4,21$ m/s po poziomej drodze pod wiatr wiejący w prędkością $v_1 = 3,8$ m/s, z wiatrem wiejącym z prędkością $\bar{v}_2 = 3,8$ m/s z prędkością $V_2 = 8,62$ m/s. Z jaką prędkością V jest w stanie jechać po tej drodze rowerzysta, gdy wieje boczny (w stosunku do kierunku jazdy) wiatr z prędkością $v_b = 3,4$ m/s? Przyjmij, że w każdym z rozważanych przypadków moc jakiej rowerzysta używa na napędzanie roweru jest taka sama, a siła oporu działająca na rower z rowerzystą jest równa $R = R_0 + kv^2 \cos \alpha$, gdzie R_0 oraz k są pewnymi stałymi (dla danego roweru i rowerzysty), v jest prędkością wiatru względem

rowerzysty, natomiast α jest kątem między kierunkiem jazdy rowerzysty a kierunkiem w stronę wiatru wiejącego względem rowerzysty.

Uwaga:

Otrzymane równanie może być trudne do rozwiązania analitycznego, ale ponieważ potrzebujemy wyniku liczbowego, możesz wykorzystać dowolną metodę graficzną lub numeryczną.

Rozwiązanie zadania N5

Moc P jest równa iloczynowi prędkości i siły, zatem w rozważanych przypadkach, zgodnie z podanym wzorem na siłę mamy:

$$\begin{aligned} P &= (R_0 + k(v_1 + V_1)^2) V_1, \\ P &= (R_0 + k(v_2 + V_2)^2) V_2, \\ P &= (R_0 + kV\sqrt{v_b^2 + V^2}) V, \end{aligned}$$

gdzie $v_2 = -\bar{v}_2$. Zauważmy, że rozwiązania się nie zmieniają, jeśli każde z równań podzielimy przez stałą; zatem zamiast rozpatrywać powyższe równania, wygodnie jest rozpatrywać równania znormalizowane, np.:

$$\begin{aligned} \bar{P} &= (\bar{R}_0 + (v_1 + V_1)^2) V_1, \\ \bar{P} &= (\bar{R}_0 + (v_2 + V_2)^2) V_2, \\ \bar{P} &= (\bar{R}_0 + V\sqrt{v_b^2 + V^2}) V. \end{aligned}$$

gdzie $\bar{P} = P/k$, $\bar{R}_0 = R_0/k$.

Z dwóch pierwszych równań mamy:

$$\begin{aligned} \bar{R}_0 &= \frac{(v_1 + V_1)^2 V_1 - (v_2 + V_2)^2 V_2}{V_2 - V_1}, \\ \bar{P} &= \frac{((v_1 + V_1)^2 - (v_2 + V_2)^2) V_1 V_2}{V_2 - V_1}. \end{aligned}$$

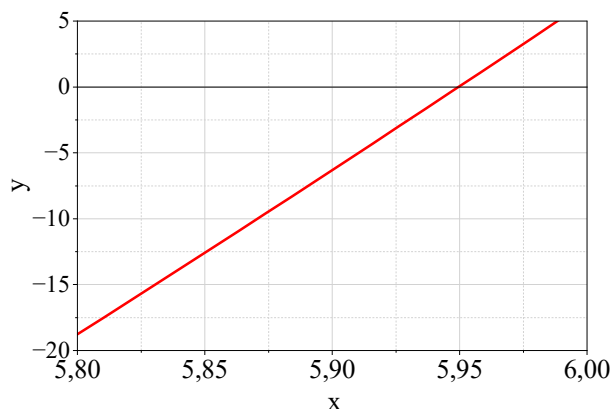
Dla $v_1 = 3,8$ m/s, $v_2 = -3,8$ m/s, $V_1 = 4,21$ m/s, $V_2 = 8,62$ m/s, $v_b = 3,4$ m/s $v_1 = 5$ m/s, $v_2 = -5$ m/s, $V_1 = 4$ m/s, $V_2 = 10$ m/s otrzymamy $\bar{R}_0 = 15,839$ m²/s², $\bar{P} = 336,80$ m³/s³.

Znając $\bar{P}$, $\bar{R}_0$ oraz v_b możemy wyznaczyć V z równania $\bar{P} = (\bar{R}_0 + V\sqrt{v_b^2 + V^2}) V$, w jawnej postaci jest to jednak niełatwe. Ponieważ jednak potrzebna jest nam wartość liczbową, możemy skorzystać z metod przybliżonych, np. z metody bisekcji lub metody graficznej.

Zapiszmy to równanie w postaci

$$(\bar{R}_0 + V\sqrt{v_b^2 + V^2}) V - \bar{P} = 0.$$

Dla wyznaczonych wartości liczbowych odpowiada temu wykres (x jest równe V , a y to lewa strona powyższej równości)



Zatem $V = 5,95$ m/s.

Zadanie N6

Do wzbogacania uranu stosuje się szybkoobrotowe wirówki, do których wtłacza się gazowy fluorek uranu. Pod wpływem siły odśrodkowej cięższy $^{238}\text{UF}_6$ gromadzi się w większej proporcji przy ściankach wirówki, natomiast w pobliżu osi wirówki zwiększa się proporcja lżejszego $^{235}\text{UF}_6$. W reaktorach i bombach jądrowych wykorzystywany jest izotop ^{235}U .

Korzystając z tego, że prawdopodobieństwo tego, że cząsteczka znajdzie się w stanie o energii E jest proporcjonalne do $e^{-E/(k_B T)}$, gdzie k_B jest stałą Boltzmanna ($k_B = 1,380649 \cdot 10^{-23}$ J/K), a T temperaturą absolutną (rozkład Boltzmanna), wyznacz o ile jest większy procentowy udział cząsteczek $^{235}\text{UF}_6$ w pobliżu osi wirówki niż procentowy udział cząsteczek $^{235}\text{UF}_6$ w pobliżu jej ścianek. Przyjmij, że temperatura gazu wewnątrz wirówki jest stała (nie zależy od położenia) i wynosi $T = 300$ K, wirówka obraca się z prędkością obrotową (częstotliwością) $f = 100000$ obr/min, odległość (radialna) od osi wirówki do ścianki wynosi $r = 8$ cm, natomiast w pobliżu ścianki wirówki jest $p = 60\%$ cząsteczek $^{235}\text{UF}_6$.

Masy atomowe wynoszą $m_A(^{235}\text{U}) = 235,04$ u, $m_A(^{238}\text{U}) = 238,05$ u, $m_A(\text{F}) = 18,998$ u, gdzie $\text{u} = 1,660539 \cdot 10^{-27}$ kg. Przyjmij, że energia oddziaływań chemicznych jest pomijalna w porównaniu z energią spoczynkową związaną z tymi masami. Zagadnienie możesz rozważyć w układzie obracającym się, wtedy cząsteczka o masie m spoczywająca w tym układzie ma (pseudo) energię potencjalną równą $-m\omega^2\rho^2/2$, gdzie ρ jest odległością tej cząsteczki od osi obrotu.

Rozwiązanie zadania N6

Siła odśrodkowa w układzie obracającym się wraz z wirnikiem wirówki jest dana wzorem

$$F = m (2\pi f)^2 r,$$

gdzie r jest odległością od osi obrotu, a m masą cząsteczki. Ponieważ jest to siła zależna liniowo od odległości, związana z nią energia potencjalna (z punktu widzenia układu inercjalnego jest ona co do wartości równa energii kinetycznej) jest równa

$$E = -\frac{1}{2}m (2\pi f)^2 r^2.$$

Znak minus odpowiada temu, że cząsteczki dążą do pozycji jak najodleglejszej od osi wirówki.

Masy cząsteczek odpowiednich sześćfluorków wynoszą

$$\begin{aligned} m_{235} &= (235,04 + 6 \cdot 18,998) \text{ u} = 349,03 \text{ u} = 5,7957 \cdot 10^{-25} \text{ kg}, \\ m_{238} &= (238,05 + 6 \cdot 18,998) \text{ u} = 352,04 \text{ u} = 5,8457 \cdot 10^{-25} \text{ kg}. \end{aligned}$$

Zgodnie z podanymi wzorami, stosunek liczby ^{238}U przy ścianie wirówki do liczby wszystkich U jest równy

$$\begin{aligned} p' &= \frac{p \cdot \exp(-\frac{1}{2}m_{235} (2\pi f)^2 r^2 / (k_B T))}{p \cdot \exp(-\frac{1}{2}m_{235} (2\pi f)^2 r^2 / (k_B T)) + (1-p) \cdot \exp(-\frac{1}{2}m_{238} (2\pi f)^2 r^2 / (k_B T))} = \\ &= \frac{1}{1 + (1-p) \cdot \exp(-\frac{1}{2}(m_{238} - m_{235}) (2\pi f)^2 r^2 / (k_B T)) / p}, \end{aligned}$$

gdzie $\exp$ jest symbolem funkcji wykładniczej o podstawie $e = 2,781 \dots$

Dla $p = 0,6$ (oraz pozostałych wartości parametrów) mamy $p' = 0,696$ czyli $p' - p = 9,6\%$ (czyli 9,6 punktów procentowych).

Zadanie N7

Z przewodzącej sfery o promieniu $R = 44 \text{ cm}$ wycięto fragment, którego brzeg jest okręgiem o promieniu $r = 16 \text{ cm}$. Przez powstały otwór do wnętrza wyciętej sfery wpada wiązka światła laserowego o mocy $P = 2,7 \text{ W}$. Przyjmując, że zarówno wewnętrzna, jak i zewnętrzna powierzchnia sfery są doskonale czarne, wyznacz temperaturę równowagową wyciętej sfery. Przyjmij, że znajduje się ona w próżni, z dala od źródeł promieniowania. Wycięty fragment jest mniejszy od fragmentu, który pozostał.

Uwaga: pole zewnętrznej powierzchni wycinka sfery o promieniu R jest równe

$$P = 2\pi R h,$$

gdzie r jest promieniem okręgu będącego brzegiem tego wycinka, natomiast h jest „wysokością” tego wycinka, tzn. odległością między płaszczyzną, wyznaczoną przez brzeg wycinka a najdalszym od niej punktem na tym wycinku.

Przyjmij, że stała Stefana-Boltzmanna jest równa $\sigma \approx 5,670374419 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$.

Rozwiązanie zadania N7

Energia wypromieniowywana z wnętrza uciętej sfery na zewnątrz jest taka sama, jak energia wypromieniowywana przez „wieczko” będące kołem o promieniu r – gdybyśmy zamknęli naszą wyciętą sferę takim wieczkiem, to w stanie stacjonarnym energia pochłaniana przez nie (pochodząca od wnętrza wycinka sfery) byłaby równa energii wypromieniowywanej na zewnątrz.

Zatem efektywna powierzchnia promieniująca jest równa

$$S = \pi R 2h + \pi r^2,$$

gdzie (uwzględniając, że pozostał większy fragment sfery) $h = R + \sqrt{R^2 - r^2}$. Z prawa promieniowania Stefana-Boltzmanna

$$P = \sigma S T^4.$$

Otrzymujemy stąd

$$T = \sqrt[4]{\frac{P}{\sigma S}} = \sqrt[4]{\frac{P/\sigma}{\pi R(2\sqrt{R^2 - r^2} + 2R) + \pi r^2}}.$$

Dla podanych wartości parametrów otrzymamy

$$T = 66,53 \text{ K}.$$

Zadanie N8

Osiem małych, jednakowych, jednorodnych kulek o masie $m = 80 \text{ g}$ każda umieszczono tak, że tworzą wierzchołki sześcianu o boku d . Sąsiednie kulki połączone są idealnymi sprężynami, tzn. o długości swobodnej równej 0, biegnącymi wzdłuż krawędzi sześcianu, każda o stałej sprężystości $k = 24 \text{ N/m}$.

Wyznacz czas, po jakim kulki się zderzą, jeśli początkowo były nieruchome. Pomiń grawitację, masę sprężyn oraz opory ruchu.

Rozwiązanie zadania N8

Energia potencjalna układu gdy odległość między najbliższymi sobie kulkami wynosi x (czyli odległość między środkami tych kulek wynosi $x + 2r$) jest równa

$$E_p = 12 \cdot \frac{1}{2} k x^2.$$

Ze względu na symetrię wszystkie kulki poruszają się z prędkościami o takiej samej wartości prędkości w kierunku środka sześcianu, tzn. energia kinetyczna wszystkich kulek wynosi

$$E_k = 8 \cdot \frac{1}{2} m v^2 = 8 \cdot \frac{1}{2} m \left(\sqrt{3} \dot{x} / 2 \right)^2,$$

gdzie uwzględniliśmy, że prędkość kulki v wiąże się z prędkością zmiany odległości między kulkami $\dot{x}$ wzorem $v = \sqrt{3} \dot{x} / 2$.

Zatem układ jest równoważny (do chwili zderzenia) oscylatorowi harmonicznemu o masie $M = 8 \cdot 3m/4 = 6m$ i o stałej sprężystości $K = 12k$. Okres drgań takiego oscylatora to

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{M}{K}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{2k}}.$$

Do chwili zderzenia kulki wykonają jedną czwartą okresu ruchu, zatem szukany czas jest równy

$$t = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{2k}}.$$

Dla podanych wartości parametrów otrzymamy

$$t = 0,0641 \text{ s}.$$

Zadanie N9

29 lutego 2026 roku opracowano elastyczny – mogący być ściskany lub rozciągany – superkondensator, którego pojemność zależy od jego długości l zgodnie ze wzorem $C = C_0(1 + \alpha \cdot (l - l_0)/l_0)$, gdzie $C_0 = 20 \text{ F}$, $\alpha = 0,82$, $l_0 = 12 \text{ cm}$.

Postanowiono wykorzystać ten kondensator jako siłownik. Z jaką maksymalną siłą może działać taki siłownik po podłączeniu go do napięcia $U = 5,0 \text{ V}$?

Uwzględnij, że wydłużenie kondensatora o $l - l_0$ wymaga siły $k(l - l_0)$, gdzie $k = 100 \text{ N/m}$.

Rozwiązanie zadania N9

Wyznamy najpierw „czystą siłę elektryczną”, tzn. siłę z jaką działałby kondensator bez uwzględnienia siły sprężystości $k(l - l_0)$.

Przyjmijmy że kondensator działa na zewnętrzny mechanizm siłą F zgodną z kierunkiem wydłużania. Zwiększając swoją długość o małe Δl wykonuje pracę $W = F\Delta l$. Zmiana pojemności kondensatora ΔC zmienia energię zmagazynowaną w kondensatorze równą $CU^2/2$ o $\Delta CU^2/2$. Jednocześnie źródło wykonuje pracę $U\Delta Q = U^2\Delta C$, która zwiększa (przy dodatnim ΔC) energię kondensatora, ale jest wykorzystywana również na wydłużenie kondensatora. Ostatecznie (pomijając energię sprężystości kondensatora) bilans energii przyjmie postać

$$\Delta C \frac{U^2}{2} + F\Delta l = U^2\Delta C,$$

przy czym wykorzystaliśmy to, że U jest stałe. Stąd

$$\begin{aligned} F &= \frac{U^2}{2} \frac{\Delta C}{\Delta l} = \\ &= \frac{U^2}{2} C_0 \frac{\alpha}{l_0}. \end{aligned}$$

Ta siła nie zależy od aktualnej długości kondensatora, zatem aby uzyskać maksymalną siłę, należy rozważyć sytuację, gdy nie trzeba przeciwstawiać się sprężystości kondensatora, czyli $l = l_0$. Dla podanych wartości parametrów otrzymamy

$$F = 1708 \text{ N}.$$

Zadanie N10

Satelita obserwacyjny krąży wokół Ziemi po południkowej orbicie (tzn. przelatuje nad biegunami) na stałej wysokości $h = 750 \text{ km}$ liczonej względem poziomu morza. W jakiej odległości od siebie znajdują się punkty na równiku, nad którymi przelatuje ten satelita w następujących po sobie okrążeniach Ziemi?

Pomiń oddziaływanie innych ciał niebieskich (w szczególności Słońca i Księżyca). Przyjmij, że okres obrotu Ziemi wynosi dokładnie 24 h, jej masa jest równa $M_z = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$, a promień (do poziomu morza, w szczególności promień równikowy) $R = 6370 \text{ km}$. Stała grawitacyjna jest równa $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$.

Rozwiązanie zadania N10

Jeśli satelita krąży po orbicie kołowej, to przyspieszenie dośrodkowe w tym ruchu jest równe przyspieszeniu grawitacyjnemu, czyli

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r = \frac{GM}{r^2},$$

gdzie T jest okresem obiegu satelity wokół Ziemi, natomiast $r = R + h$. Zatem

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{GM}}.$$

W czasie T punkt na równiku przesunie się o odległość

$$s = \frac{T}{T_z} 2\pi R,$$

gdzie $T_z = 24$ h. Powyższe s jest szukaną odległością.

Dla podanych wartości parametrów otrzymamy

$$s = 2771 \text{ km.}$$