



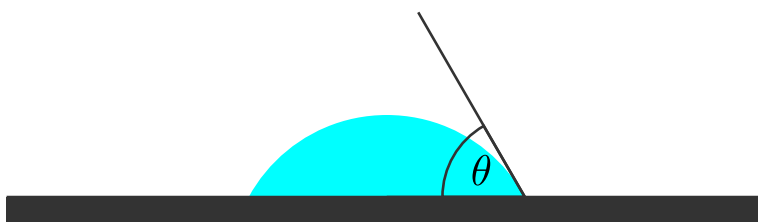
LXXV OLIMPIADA FIZYCZNA

ZAWODY III STOPNIA

CZEŚĆ DOŚWIADCZALNA, 11.04.2026 r.

Za zadanie można otrzymać maksymalnie 40 punktów.

Rozważmy kroplę oleju na płaskiej powierzchni szkła. Sytuację taką przedstawia poniższy rysunek. Kątem zwilżania θ nazywamy kąt pomiędzy płaszczyzną styczną do powierzchni kropli na granicy ze szkłem a powierzchnią, na której spoczywa kropla. Kąt zwilżania zależy wyłącznie od wartości napięć powierzchniowych na styku oleju, szkła i powietrza.



Masz do dyspozycji:

- latarkę ze statywem posiadającą funkcję świecenia w kolorze czerwonym,
- pojemnik z olejem rzepakowym z rozpylaczem,
- szklaną soczewkę płaskowypukłą,
- statyw na soczewkę z regulacją wysokości,
- miarkę z podziałką milimetrową,
- karteczki samoprzylepne,
- zestaw do zachowania czystości soczewki i stanowiska (rękawiczki, miska, rozpylacz z izopropanolem, ręczniki papierowe, chusteczki z mikrofibry).

Wyznacz kąt zwilżania oleju rzepakowego na szkłe. Przyjmij, że małe krople oleju mają kształt fragmentu kuli, a wpływ grawitacji na ich kształt jest pomijalny. Przyjmij ponadto, że $\sin \theta < 1/n$ i $\theta < \pi/2$, gdzie $n = 1,47$ jest współczynnikiem załamania oleju rzepakowego dla światła czerwonego.

Uwaga 1. Dbaj o czystość soczewki. Nie dotykaj jej powierzchni palcami oraz czyść ją regularnie przy pomocy załączonego zestawu. Zanieczyszczenia mają znaczący wpływ na wartość kąta zwilżania. Staraj się również w miarę możliwości zachować czystość całego stanowiska. Nie stosuj elementów wspomnianego zestawu w celach innych niż zachowanie czystości.

Uwaga 2. By zapewnić kulistość małych kropeł na danej powierzchni, nie przyskaj na nią rozpylaczem bezpośrednio, gdyż rozprężone krople osiadające na tej powierzchni mogą się na niej rozmazywać. Zamiast tego przyskaj rozpylaczem nad tą powierzchnią tak, aby krople opadały na nią swobodnie, co zapewni im kształt fragmentu kuli.

Uwaga 3. Załączona latarka posiada różne tryby świecenia. By wybrać odpowiedni tryb, należy tuż po włączeniu ponownie przyciskać włącznik, aż do uzyskania odpowiedniego trybu. Pamiętaj, by wyłączać latarkę pomiędzy pomiarami, gdyż bateria może się rozładować.

Uwaga 4. Przydatne mogą być niektóre z poniższych wzorów:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta,$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta,$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta},$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta - 1}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta},$$

$$\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\frac{d}{dx} \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

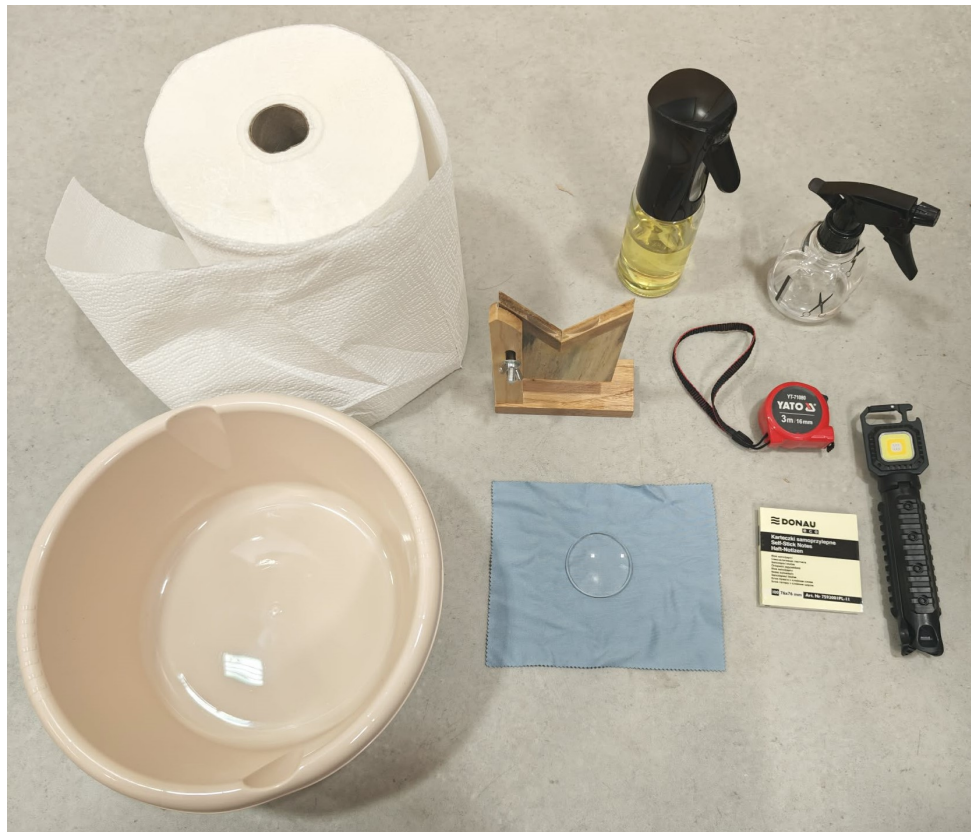
$$\frac{d}{dx} \operatorname{arctg} x = \frac{1}{1+x^2},$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arcctg} x = -\frac{1}{1+x^2},$$

gdzie funkcje \arcsin , \arccos , arctg oraz arcctg są funkcjami odwrotnymi odpowiednio do funkcji \sin , \cos , tg oraz ctg na odpowiednich przedziałach, tj. kolejno $[-\pi/2, \pi/2]$, $[0, \pi]$, $(-\pi/2, \pi/2)$ oraz $(0, \pi)$.

Informacja o zestawie doświadczalnym użytym podczas zawodów

Zestaw, który uczestnicy mieli do dyspozycji, znajduje się na poniższym zdjęciu.



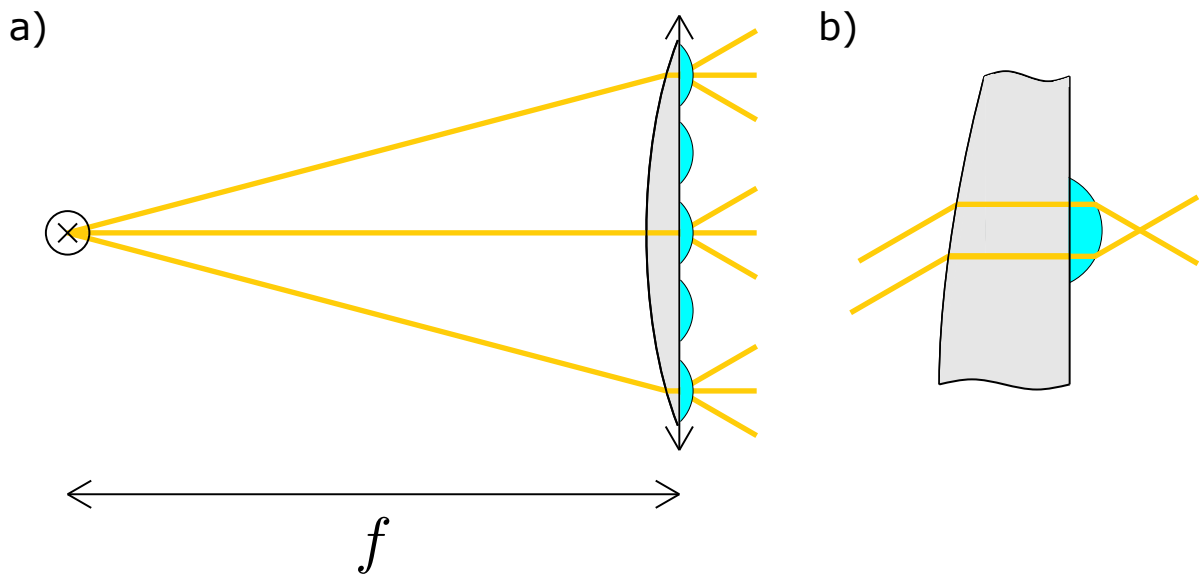
Elementy przedstawionego zestawu mają poniższe parametry (dokładne wartości nie są jednak kluczowe dla rozwiązania zadania):

- wykorzystana w zadaniu soczewka była szklaną soczewką płaskowypukłą o ogniskowej 20 cm oraz średnicy 5 cm,
- statyw pozwalał na stabilne umieszczenie soczewki w pozycji pionowej; jego wysokość mogła być regulowana w zakresie, który pozwalał na umieszczenie soczewki na wysokości zawartej w zestawie doświadczalnym latarki,
- latarka posiadała 6 różnych trybów świecenia, z czego jeden z nich był trybem ciągłego świecenia światłem czerwonym,
- latarka przymocowana była do trójnożu, który pozwalał na jej stabilne ustawienie na stole,
- rozpylacz dołączony do pojemnika z olejem pozwalał na wytworzenie na tyle małych kropeł, że spełniały one warunki postawione w treści zadania,
- miarka miała 3 m długości i posiadała podziałkę z dokładnością do 1 mm.

Rozwiązanie

Część teoretyczna

Rozwiązanie polega na umieszczeniu źródła światła w ognisku soczewki od strony wypukłej tak, aby emitowane przez nie promienie były równoległe do osi optycznej wewnątrz tej soczewki. Następnie na płaskiej stronie soczewki należy umieścić małe krople oleju przy pomocy rozpylacza. Promienie świetlne wnikające do kropli nie będą się załamywać na granicy soczewka-olej, ponieważ padają na tę granicę pod kątem prostym, co zapewnione zostało przez równoległość promieni do osi optycznej soczewki. Sytuację tę przedstawia Rysunek 1.



Rysunek 1: Schemat układu do pomiaru kąta zwilżania, f – ogniskowa soczewki, a) widok z góry na płaszczyznę blatu stołu, b) zbliżenie na kroplę

Rozważmy zachowanie promienia świetlnego wychodzącego z kropli. Poszukajmy maksymalnego odchylenia promienia od osi optycznej. Promień padający na fragment powierzchni kropli pod kątem α względem normalnej do tej powierzchni zostanie załamany pod kątem β zgodnie z prawem Snella:

$$n \sin \alpha = \sin \beta, \quad (1)$$

gdzie n jest współczynnikiem załamania światła dla oleju rzepakowego. Przyjmujemy, że współczynnik załamania światła powietrza wynosi 1. Kąt odchylenia promienia od osi optycznej soczewki (oraz kropli) dany jest wzorem:

$$\gamma = \beta - \alpha. \quad (2)$$

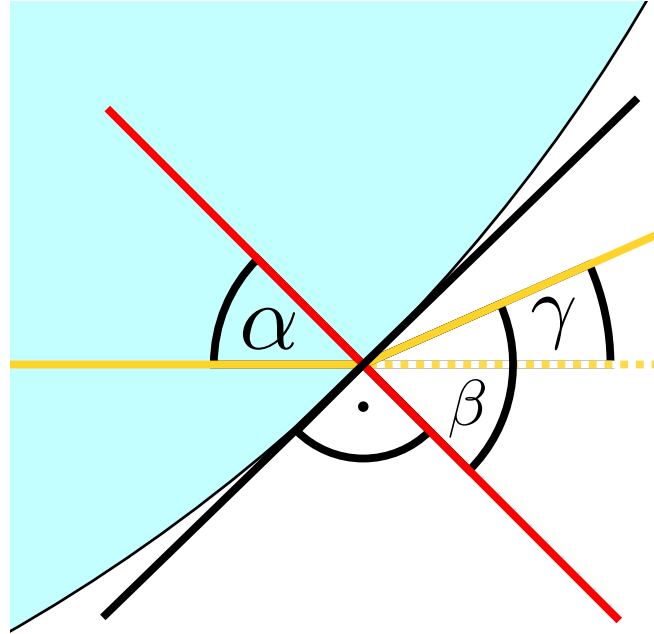
Sytuację tę przedstawia Rysunek 2.

Jawna postać funkcji $\gamma(\alpha)$ może zostać wyznaczona z równań (1) i (2):

$$\gamma(\alpha) = \arcsin(n \sin \alpha) - \alpha. \quad (3)$$

Szukamy maksymalnego odchylenia promienia γ_{\max} . W tym celu obliczamy pochodną funkcji $\gamma(\alpha)$:

$$\frac{d\gamma}{d\alpha} = \frac{n \cos \alpha}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 \alpha}} - 1. \quad (4)$$



Rysunek 2: Załamanie promienia świetlnego na powierzchni kropli dla dolnego promienia z Rysunku 1b)

Pokażemy, że funkcja $\gamma(\alpha)$ jest rosnąca. Wystarczy więc pokazać, że pochodna jest dodatnia dla każdego α . Miejmy na uwadze przy dalszych rozważaniach, że: $n > 1$, $\alpha \in [0, \theta]$ (co wynika z kształtu kropli – Rysunki 2 i 3) oraz pamiętajmy o założeniach dotyczących kąta zwilżania.

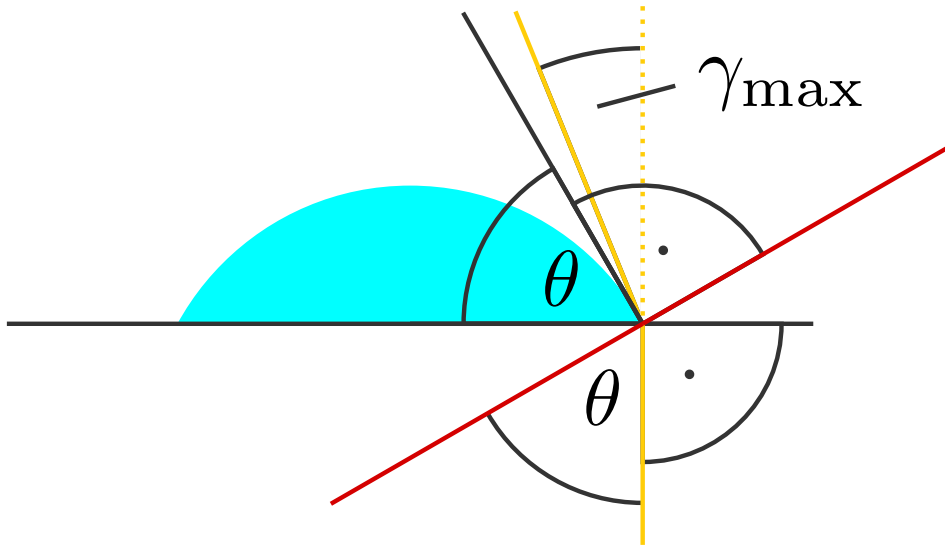
$$\begin{aligned} \frac{n \cos \alpha}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 \alpha}} - 1 &> 0 \Leftrightarrow \\ \cos \alpha &> \sqrt{\frac{1}{n^2} - \sin^2 \alpha} \Leftrightarrow \\ \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha &> \frac{1}{n^2} \Leftrightarrow \\ 1 &> \frac{1}{n^2} \Leftrightarrow \\ n &> 1. \end{aligned}$$

Wynika stąd, że największy kąt odchylenia promienia występuje dla największej wartości kąta α . Faktu tego dowieść można również bez wykorzystania pochodnej. Podstawiając nową zmienną $\xi = \sin \alpha$, możemy napisać:

$$\gamma(\xi) = \arcsin(n\xi) - \arcsin \xi. \quad (5)$$

Jest to różnica dwóch wartości tej samej funkcji rosnącej. Ponieważ funkcja \arcsin rośnie coraz szybciej (jest nieliniowa i staje się coraz bardziej stroma wraz ze wzrostem argumentu, jej wykres jest symetrycznym odbiciem wykresu funkcji \sin względem prostej $f(\xi) = \xi$), a argument pierwszego wyrazu jest dodatkowo przeskalowany czynnikiem $n > 1$, pierwszy wyraz rośnie zawsze szybciej niż drugi. W związku z tym funkcja $\gamma(\xi)$ jest rosnąca względem ξ . Ponieważ w przedziale $\alpha \in [0, \theta]$ funkcja $\xi = \sin \alpha$ jest rosnąca, a funkcję $\gamma(\alpha)$ traktować można jako funkcję złożoną $\gamma(\xi(\alpha))$, to funkcja $\gamma(\alpha)$ jest również rosnąca względem α .

Największy możliwy kąt padania promienia na powierzchnię kropli jest równy kątowi zwilżania θ , co pokazano na Rysunku 3.



Rysunek 3: Kąt padania promienia świetlnego na brzegu kropli

Możemy więc napisać:

$$\gamma_{\max} = \arcsin(n \sin \theta) - \theta. \quad (6)$$

Przekształćmy powyższy wzór do postaci wyrażającej kąt zwilżania θ :

$$\begin{aligned} \gamma_{\max} + \theta &= \arcsin(n \sin \theta) \\ \sin(\gamma_{\max} + \theta) &= n \sin \theta \\ \sin \gamma_{\max} \cos \theta + \cos \gamma_{\max} \sin \theta &= n \sin \theta \\ \sin \gamma_{\max} \cos \theta &= \sin \theta (n - \cos \gamma_{\max}) \\ \frac{\sin \gamma_{\max}}{n - \cos \gamma_{\max}} &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \operatorname{tg} \theta. \end{aligned}$$

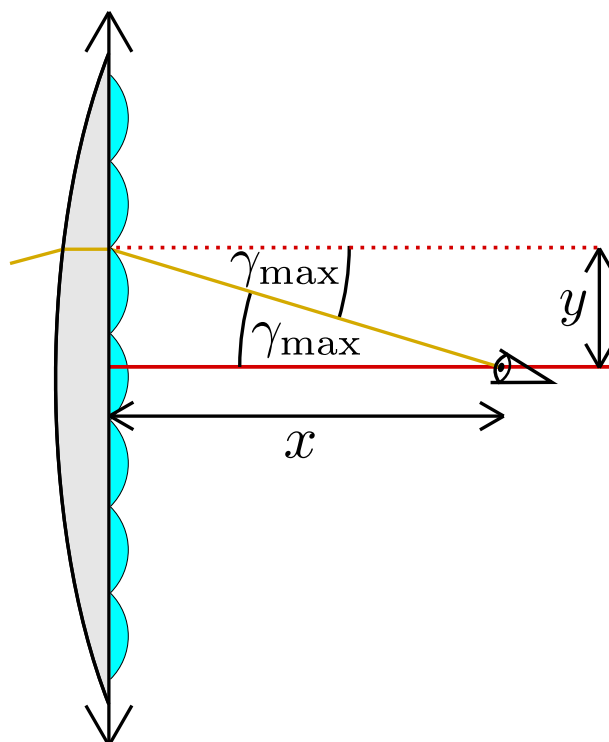
Ostatecznie otrzymujemy wzór na kąt zwilżania θ :

$$\theta = \operatorname{arctg} \left(\frac{\sin \gamma_{\max}}{n - \cos \gamma_{\max}} \right). \quad (7)$$

W powyższych przekształceniach skorzystaliśmy z założenia, że $\sin \theta < 1/n$. Założenie to ponadto gwarantuje, że nie nastąpi całkowite wewnętrzne odbicie światła w kropli. Aby wyznaczyć kąt γ_{\max} , należy zaobserwować kąt, dla którego światło wychodzące z kropli przestaje być widoczne. Wówczas należy zmierzyć odległości x oraz y przedstawione na Rysunku 4.

Ponieważ w dalszych obliczeniach do danych zostanie dopasowana prosta, potrzebne będzie wyrażenie wzoru (7) w zależności od tangensa kąta γ_{\max} , który można wyznaczyć na podstawie pomiarów odległości x i y jako współczynnik kierunkowy prostej dopasowanej do danych pomiarowych.

$$\theta = \operatorname{arctg} \left(\frac{\sin \gamma_{\max}}{n - \cos \gamma_{\max}} \right) = \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{tg} \gamma_{\max}}{n \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \gamma_{\max}} - 1} \right). \quad (8)$$



Rysunek 4: Pomiar maksymalnego kąta odchylenia światła wychodzącego z kropli – widok z góry na płaszczyznę blatu stołu, proste czerwone (ciągła i przerywana) to proste równoległe do osi optycznej soczewki leżące w płaszczyźnie równoległej do płaszczyzny blatu stołu na wysokości środka soczewki

Część doświadczalna

Zastosowaną metodą pomiaru kąta zwilżania jest pomiar odległości x i y omówionych powyżej. Układ przedstawiony na Rysunku 1 przygotowany w następujący sposób:

- Soczewkę dokładnie wyczyszczono przy pomocy załączonego zestawu do zachowania czystości. Soczewkę spryskano izopropanolem, a następnie podłużnymi ruchami wytarto ją ręcznikiem papierowym. Następnie dokładnie wyczyszczono ją chusteczką z mikrofibry, wykonując ruchy kołiste, by nie pozostawić smug.
- Na płaskiej stronie soczewki umieszczono małe krople oleju przy pomocy rozpylacza, przyskajając nad tą powierzchnią tak, aby krople opadały na nią swobodnie, co zapewniło im kształt fragmentu kuli.
- Latarkę (działającą w trybie świecenia w kolorze czerwonym) umieszczono w ognisku soczewki od strony wypukłej tak, aby emitowane przez nią promienie były równoległe do osi optycznej wewnątrz tej soczewki. By tego dokonać, obserwowano obraz światła wychodzącego z soczewki w największej możliwej odległości od niej. Latarkę ustawiono tak, żeby obraz w dużej odległości był możliwie najostriejszy. Następnie poprawiono ustawienie latarki tak, żeby obraz światła wychodzącego z soczewki miał stały rozmiar w każdej odległości (by sprawdzić, czy tak jest, światło wychodzące obserwowano na kartce A4, którą poruszano wzdłuż osi układu), co świadczy o równoległości promieni świetlnych do osi optycznej soczewki.

Pomiary dokonywano w płaszczyźnie stołu na wysokości środka soczewki (zgodnie z Rysunkiem 4). Soczewkę obserwowano w pięciu różnych odległościach od niej. W każdej pozycji na stole naklejono karteczkę samoprzylepną. Pomiary polegały na obserwacji światła wychodzącego z kropel i zaznaczaniu na karteczce samoprzylepnej punktu, w którym światło przestaje być widoczne. By oszacować niepewność pomiaru tego położenia w każdej pozycji zaznaczono trzy punkty, w których światło przestaje być widoczne. Po zaznaczeniu tych punktów na każdej z karteczek zmierzono odległości x i y przedstawione na Rysunku 4 dla każdego z tych punktów. Pomiary tych dokonano przy pomocy miarki z podziałką milimetrową. By zapewnić większą dokładność pomiaru, środek soczewki został oznaczony na karteczce samoprzylepnej, a odległości x i y mierzono względem tego punktu. By zapewnić prostopadłość odcinków x i y (Rys. 4) względem siebie, przyklepiono do stołu szereg karteczek samoprzylepnych wzdłuż osi, w której mierzono odległość y , a następnie miarkę przykładano prostopadle do tej osi. By przyłożyć miarkę prostopadle do osi, jako wzór kąta prostego wykorzystano krawędź kartki A4. Całą powyższą procedurę wykonano dwukrotnie (dla pomiarów serii 1 i 2), by zbadać wpływ dokładności czyszczenia soczewki na wynik pomiaru. Pomiary odległości x i y dla każdej z pięciu pozycji przedstawiono w poniższej tabeli. Na podstawie powyższych pomiarów wyznaczono wartości x

Pozycja	x , mm			y , mm		
Seria 1						
1	274	278	294	66	76	74
2	537	556	543	135	140	150
3	782	773	783	207	222	217
4	1039	1032	1048	267	273	283
5	1277	1256	1282	323	325	340
Seria 2						
1	260	258	268	58	63	68
2	413	401	414	90	94	108
3	630	642	626	167	159	176
4	832	821	824	218	221	226
5	1042	1034	1056	263	289	278

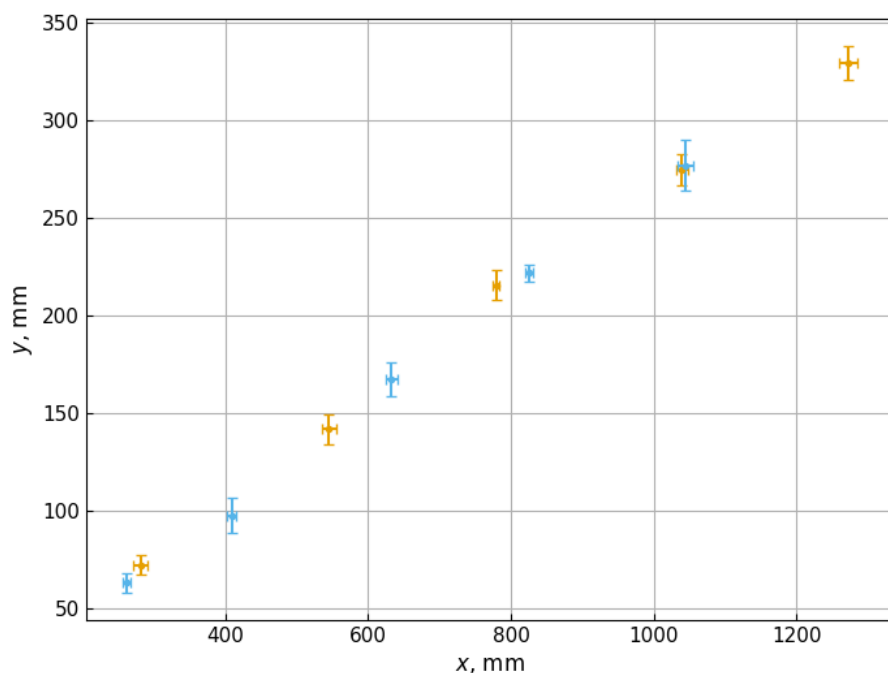
oraz y dla każdej pozycji jako średnie z trzech pomiarów. Za niepewność pomiarową związaną z rozrzutem wyników przyjęto połowę różnicy między największą i najmniejszą wartością z trzech pomiarów, co jest typowym, szkolnym sposobem oszacowania niepewności pomiaru bezpośredniego w przypadku niewielkiej liczby pomiarów. Należy również uwzględnić niepewność pomiaru odległości miarką. Działka elementarna miarki wynosi 1 mm i wartość tę przyjęto za niepewność graniczną w pomiarze odległości x i y , tj. $\Delta_{pm} = 1$ mm. By połączyć niepewności związane z rozrzutem wyników oraz dokładnością podziałki, należy zastosować standardową metodę łączenia niepewności, która dla dwóch niepewności Δ_1 i Δ_2 przyjmuje postać:

$$\Delta_c = \sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2}, \quad (9)$$

gdzie Δ_c jest całkowitą niepewnością pomiarową, a Δ_1 i Δ_2 są poszczególnymi niepewnościami, które chcemy połączyć.

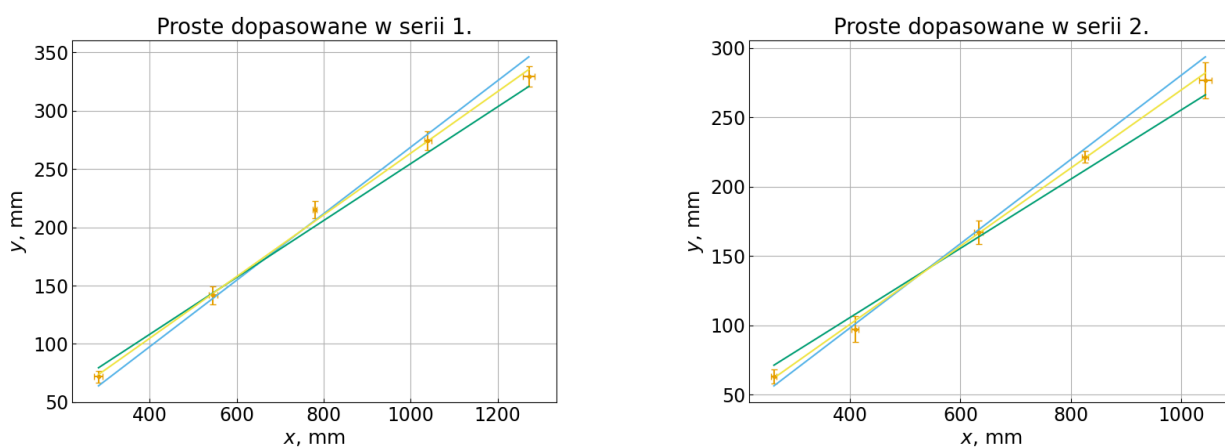
Ostatecznie otrzymane wyniki przedstawiono na wykresie 5.

Dla każdej serii pomiarów do punktów dopasowano graficznie funkcję liniową $y = ax + b$. Parametr b służy uwzględnieniu niepewności ustalenia punktu, względem którego mierzono odległości x i y .



Rysunek 5: Wyniki pomiarów odległości x i y dla pięciu różnych pozycji względem soczewki, punkty pomarańczowe – seria pierwsza, punkty niebieskie – seria druga

By oszacować niepewność parametru a tego dopasowania, do danych dopasowano również dwie proste o odpowiednio największym i najmniejszym możliwym nachyleniu. Niepewność parametru a oszacowano jako połowę różnicy między największym i najmniejszym możliwym nachyleniem. Wykresy na Rysunku 6 przedstawiają proste dopasowane do danych dla obu serii pomiarów: Współczynniki dopasowanych prostych oraz ich niepewności przedstawiono w poniższej tabeli.



Rysunek 6: Proste dopasowane do danych pomiarowych dla obu serii pomiarów

By otrzymać ostateczne wartości kąta zwilżania θ dla obu serii pomiarów, wystarczy podstawić do wzoru (8) wartości tangensa kąta γ_{\max} , który jest równy współczynnikowi kierunkowemu prostej dopasowanej do danych pomiarowych, oraz współczynnik załamania światła oleju rzepakowego

Seria	a	Δ_a
1	0,26	0,07
2	0,28	0,08

dla światła czerwonego, który wynosi $n = 1,47$. Niepewność oszacować można, korzystając z prawa propagacji niepewności, które dla funkcji $\theta(a)$ przyjmuje postać:

$$\Delta_\theta = \frac{1}{2} \left| \theta(a + \Delta_a) - \theta(a - \Delta_a) \right|, \quad (10)$$

gdzie a jest wartością współczynnika kierunkowego prostej dopasowanej do danych pomiarowych, a Δ_a jest jego niepewnością. Ostatecznie otrzymane wyniki przedstawiono w poniższej tabeli.

Seria	θ , rad	Δ_θ , rad	θ , °	Δ_θ , °
1	0,47	0,09	27	5
2	0,49	0,10	28	6

Zauważyć można, że zakresy niepewności obu serii pokrywają się w szerokim przedziale, a same wyniki są do siebie zbliżone, co wskazuje na zgodność uzyskanych wartości kąta zwilżania w serii 1 i 2. Powyższa metoda nie uwzględnia jednak w pełni wpływu błędu systematycznego związanego z niedokładnością zaznaczania punktu, względem którego mierzono odległości x i y . W tym miejscu warto również zauważyć, że założenie o kulistości kropli nie jest konieczne w naszych rozważaniach. By obliczenia teoretyczne dobrze opisywały rzeczywistość, wystarczy, by kształt kropli był taki, że w miarę zbliżania się do brzegu kropli, kąt padania promieni będzie rósł. Kąt padania na brzegu kropli jest bowiem wyznaczany jednoznacznie przez napięcia powierzchniowe w tym miejscu, zatem nie zależy on od kształtu reszty kropli.

Punktacja

1. Pomysł na wyznaczenie kąta zwilżania – pomysł na rozpylenie oleju na płaskiej stronie soczewki i umieszczenie latarki w jej ognisku od strony wypukłej lub pomysł równoważny 3 pkt.
2. Związek między kątem padania promienia na powierzchnię kropli a kątem odchylenia promienia od osi optycznej – wzór (3) lub równoważny 1 pkt.
3. Wykazanie, że funkcja ze wzoru (3) jest rosnąca 1 pkt.
4. Związek między maksymalnym kątem padania promienia na powierzchnię kropli a kątem zwilżania – rysunek 4 1 pkt.
5. Wyprowadzenie wzoru (7) lub równoważnego 2 pkt.
6. Zbudowanie i opis układu pomiarowego umożliwiającego wyznaczenie kąta zwilżania 2 pkt.
7. Metoda na ustawienie źródła światła w ognisku soczewki 1 pkt.
8. Wykonanie serii pomiarów umożliwiających wyznaczenie kąta granicznego γ_{\max} ... 3 pkt.
9. Wyznaczenie kąta granicznego γ_{\max} wraz z niepewnością pomiarową na podstawie odpowiedniego wykresu lub równoważnej analizy 3 pkt.
10. Wynik końcowy wraz z oszacowaniem niepewności pomiarowej 3 pkt.