

# LXXV OLIMPIADA FIZYCZNA

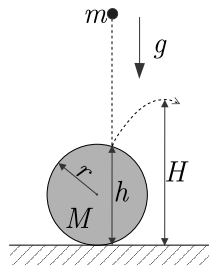
## ZAWODY III STOPNIA

CZEŚĆ TEORETYCZNA, 12.04.2026

Za każde zadanie można otrzymać maksymalnie 20 punktów.

### Zadanie 1

Na płaskim, poziomym podłożu spoczywa jednorodna kula o masie  $M$  i promieniu  $r$ . Na kulę zostaje upuszczona kulka o masie  $m$  i zaniedbywalnie małym promieniu. Prędkość małej kulki tuż przed zderzeniem jest pionowa i ma wartość  $v_0$ , zderzenie następuje na wysokości  $h$  nad podłożem ( $h > r$ ). Rozważamy tylko sytuację, w której po zderzeniu mała kulka wznosi się, przy czym jej maksymalna wysokość w trakcie ruchu wynosi  $H$  ( $H > h$ ) nad podłożem.



Wyznacz prędkość środka dużej kuli po zderzeniu. Podaj wynik liczbowy dla  $r = 8$  cm,  $h = 15$  cm,  $H = 20$  cm,  $M = 3$  kg,  $m = 0,2$  kg,  $v_0 = 5$  m/s, oraz przyspieszenia ziemskiego  $g = 9,81$  m/s.

Przyjmij, że zderzenie między kulami trwa bardzo krótko, powierzchnie kul są gładkie, a tarcie między nimi jest zerowe. Współczynnik tarcia między dużą kulą a podłożem jest na tyle duży, że kula ta nie ślizga się po podłożu w trakcie zderzenia ani po nim. Ponadto duża kula cały czas styka się z podłożem, nie odbija się od niego. Nie występuje opór powietrza. Moment bezwładności jednorodnej kuli względem osi przechodzącej przez jej środek  $I = 2Mr^2/5$ .

Uwaga: o zderzeniu nie można założyć, że jest sprężyste.

### Zadanie 2

Odkryto kulistą planetoidę o promieniu  $R$ , w której pod bardzo cienką, skalną powierzchnią znajduje się nieściślna ciecz o gęstości  $\rho$ , a w centrum znajduje się kuliste, sferycznie symetryczne, skalne jądro o promieniu  $r_1$ . W cieczy zanurzono kulistą sondę o masie  $m$  na maksymalną możliwą głębokość, czyli aż do skalnego jądra; zmierzone przez sondę ciśnienie na tej głębokości wynosi  $p_1$ . Zależność objętości sondy od ciśnienia  $p$  jest dana wzorem  $V = V_0(1 - \alpha p)$ , gdzie  $V_0$  oraz  $\alpha$  są stałymi dodatnimi.

a) Wyznacz minimalną pracę, jaką należy wykonać wyciągając sondę z cieczy wypełniającej planetoidę za pomocą nieważkiej, cienkiej, wiotkiej i nierozciągliwej liny.

b) Wyznacz masę skalnego jądra.

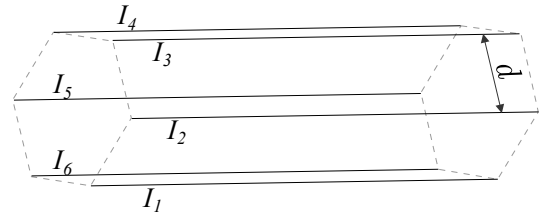
Objętość oraz masa sondy są znacznie mniejsze od odpowiednio objętości i masy cieczy. Pomiń grawitację innych ciał niebieskich. Ciśnienie na powierzchni cieczy, czyli tuż pod skalną warstwą jest znacznie mniejsze od  $p_1$  (praktycznie jest równe 0) i nie ulega zmianie w trakcie wyciągania sondy.

W przypadkach a) oraz b) wyznacz wyniki liczbowe dla  $R = 4,00 \cdot 10^5$  m,  $r_1 = 2,00 \cdot 10^5$  m,  $p_1 = 3,00 \cdot 10^7$  Pa,  $\rho = 1000$

kg/m<sup>3</sup>,  $m = 10$  kg,  $V_0 = 1,05 \cdot 10^{-2}$  m<sup>3</sup>,  $\alpha = 6,00 \cdot 10^{-9}$  /Pa. Stała grawitacyjna jest równa  $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$  m<sup>3</sup>/(kg·s<sup>2</sup>).

### Zadanie 3

Rozważmy  $N$  sztywnych, cienkich, długich, równoległych do siebie przewodów tworzących – gdy nie płynie prąd –  $N$  krawędzi bocznych graniastosłupa prawidłowego. Odległość między sąsiednimi krawędziami wynosi  $d$ , patrz rysunek (odpowiada on szczególnemu przypadkowi  $N = 6$ ). Przez przewód  $k$  (gdzie  $k = 1, 2, \dots, N$ ) płynie prąd o natężeniu  $I_k = I_0 \cos(\omega t + 2k\pi/N)$ , gdzie  $I_0$  (amplituda natężenia) oraz  $\omega$  (częstość) są stałymi, a  $t$  jest czasem.



Przewody są umocowane sprężysto, tak że mogą się odchylić radialnie (zmieniać odległość od osi graniastosłupa), ale nie mogą się przesuwać w kierunku prostopadłym do radialnego. Odchylenie przewodu od krawędzi graniastosłupa na odległość  $x$  wymaga na jednostkę długości przewodu siły  $Kx$ , gdzie  $K$  jest stałą. Masa każdego przewodu na jednostkę jego długości wynosi  $\lambda$ .

a) Dla jakiej częstości  $\omega$  zachodzi rezonans?

b) Zakładając, że nie zachodzi rezonans, wyznacz średnie radialne odchylenie od krawędzi graniastosłupa oraz amplitudę radialnych drgań każdego z przewodów po długim czasie od włączenia prądu. Przyjmij, że dodatnia wartość tego odchylenia odpowiada wzrostowi odległości przewodu od osi graniastosłupa.

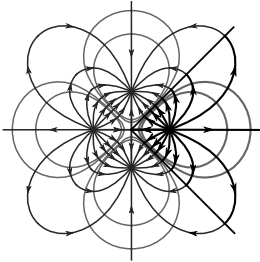
Załącz, że odchylenie przewodu od krawędzi graniastosłupa jest małe w porównaniu z  $d$  – tak małe, że nawet w przypadku rezonansu to odchylenie nie wpływa na siły wzajemnego oddziaływania przewodów.

Uwagi:

Jeśli na oscylator harmoniczny o masie  $m$  i stałej sprężystości  $k$  działa siła periodyczna  $F = F_0 \cos(\Omega t)$ , to po upływie długiego czasu dla  $\Omega^2 \neq k/m$  oscylator będzie drgał zgodnie ze wzorem  $x = A \cos(\Omega t)$ , gdzie  $A = F_0/(k - m\Omega^2)$  (są to tak zwane drgania stacjonarne).

Zauważ, że wielkość  $I_0 \cos(\omega t + \alpha)$  można interpretować jako  $x$ -ową składową wektora o długości  $I_0$  obracającego się w płaszczyźnie  $xy$  z prędkością kątową  $\omega$ , przy czym w chwili  $t = 0$  ten wektor tworzy z osią  $x$  kąt  $\alpha$ .

Przyjmij, że oddziaływania magnetyczne są takie, jakby układ znajdował się w próżni. Pomiń wpływ przewodów zasilających – doprowadzających oraz odprowadzających prąd (nie są one przedstawione na rysunku; nie są również przedstawione mocowania przewodów).



# LXXV OLIMPIADA FIZYCZNA

## ROZWIĄZANIA ZADAŃ ZAWODÓW III STOPNIA

### CZĘŚĆ TEORETYCZNA

#### Rozwiązanie zadania 1

Oznaczmy składowe poziomą i pionową prędkości małej kulki tuż po zderzeniu jako  $v_x$  i  $v_y$ . Ruch pionowy małej kulki po zderzeniu jest ruchem jednostajnie opóźnionym; jej prędkość pionowa wynosi 0 gdy znajduje się ona na wysokości  $H$  nad środkiem dużej kuli, stąd

$$v_y = \sqrt{2g(H - h)}. \quad (1)$$

W czasie zderzenia nie występuje tarcie między kulami, więc siła oddziaływania między nimi jest prostopadła do stykających się powierzchni. Zderzenie trwa bardzo krótko, więc wpływ siły grawitacji na zmianę pędu małej kulki można zaniedbać. Oznacza to, że wypadkowa siła działająca na małą kulkę w trakcie zderzenia jest nachylona do poziomu pod kątem  $\alpha$  spełniającym warunek

$$\sin \alpha = \frac{h - r}{r}. \quad (2)$$

Zmiana prędkości małej kulki jest spowodowana działaniem tej siły, stąd stosunek zmiany składowej pionowej do składowej poziomej wynosi  $\operatorname{tg} \alpha$ ; zatem

$$\frac{v_y + v_0}{v_x} = \operatorname{tg} \alpha. \quad (3)$$

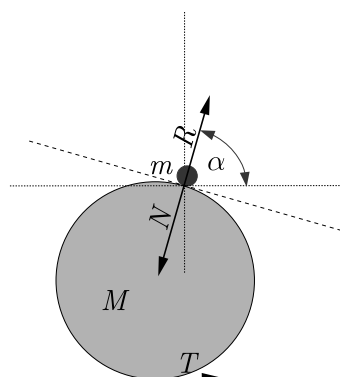
Powyżej przyjęto, że dodatni znak  $v_y$  odpowiada ruchowi w górę, a dodatni znak  $v_x$  – oddalaniu się od środka dużej kuli. Z powyższego równania otrzymujemy

$$v_x = (v_y + v_0) \operatorname{ctg} \alpha = \quad (4)$$

$$= \left( \sqrt{2g(H - h)} + v_0 \right) \operatorname{ctg} \alpha, \quad (5)$$

gdzie skorzystaliśmy również z równania (1).

Oznaczmy przez  $\vec{N}$  siłę nacisku, z jaką mała kulka działa na dużą w pewnym momencie zderzenia, przez  $\vec{R}$  siłę reakcji dużej kulki działającą na małą w tym samym momencie, a przez  $\vec{T}$  siłę tarcia działającą na dużą kulę również w tym samym momencie (patrz rys.).



Ponieważ  $R = |\vec{R}| = |\vec{N}|$ , poziome składowe wypadkowych sił działających na dużą ( $F_{1,x}$ ) oraz małą ( $F_{2,x}$ ) kulę wynoszą odpowiednio

$$F_{1,x} = R \cos \alpha - T, \quad (6)$$

$$F_{2,x} = R \cos \alpha. \quad (7)$$

W obu przypadkach dodatni znak odpowiada oddalaniu się od drugiej kuli.

Moment siły działający na dużą kulę względem jej środka jest równy

$$\tau = Tr. \quad (8)$$

Kula ta toczy się bez poślizgu, więc jej przyspieszenie liniowe  $a$  oraz kątowe  $\varepsilon$  są związane wzorem

$$a = \varepsilon r.$$

To oznacza, że

$$\frac{F_{1,x}}{M} = \frac{\tau}{I} r, \quad (9)$$

co po użyciu równań (6), (8) oraz wzoru na  $I$  prowadzi do relacji między siłami  $T$  i  $R$

$$R \cos \alpha = \frac{7}{2} T. \quad (10)$$

Po wstawieniu tej relacji do równań (6), (7), otrzymujemy wyrażenie na stosunek  $F_{1,x}/F_{2,x}$ , który okazuje się być taki sam w każdym momencie zderzenia

$$\frac{F_{1,x}}{F_{2,x}} = \frac{5}{7}. \quad (11)$$

Zauważmy, że zmiana pędu poziomego każdej z kulek w pewnym krótkim odcinku czasu  $\Delta t$  jest proporcjonalna do działającej na nią wypadkowej siły poziomej.

Oznacza to, że w każdym odcinku czasu stosunek zmiany pędu poziomego małej kulki do zmiany pędu poziomego dużej kulki jest równy  $F_{1,x}/F_{2,x} = 5/7$ .

Wynika z tego, że podobna zależność łączy poziome pędy uzyskane przez kulki w czasie całego zderzenia

$$\frac{MV}{mv_x} = \frac{F_{1,x}}{F_{2,x}} = \frac{5}{7}. \quad (12)$$

gdzie  $V$  jest szukaną prędkością środka dużej kulki. Z powyższego równania i z równania (5) otrzymujemy

$$V = \frac{5mv_x}{7M} = \frac{5m \left( \sqrt{2g(H-h)} + v_0 \right) \operatorname{ctg} \alpha}{7M}. \quad (13)$$

Korzystając z równania (2) oraz faktu, że  $0 \leq \alpha \leq \pi/2$  (mała kulka spada na górną część dużej kulki), otrzymujemy

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} \alpha &= \frac{\sqrt{r^2 - (h-r)^2}}{h-r} = \\ &= \frac{\sqrt{2rh - h^2}}{h-r}. \end{aligned}$$

co po wstawieniu do (13) prowadzi do wyniku końcowego

$$V = \frac{5mv_x}{7M} = \frac{5m \left( \sqrt{2g(H-h)} + v_0 \right) \sqrt{2rh - h^2}}{7M(h-r)}. \quad (14)$$

Po podstawieniu wartości liczbowych otrzymujemy

$$V = 0,16 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Zauważmy, że nie wszystkie kombinacje wartości wyjściowych parametrów mają sens fizyczny. W szczególności dla  $h \rightarrow r$  otrzymamy z powyższego, że  $V \rightarrow \infty$ . Jednak dla  $h$  bliskich  $r$  mała kulka zderza się pod małym kątem z powierzchnią dużej kulki, a więc na pewno po odbiciu nie będzie poruszała się do góry, wbrew stwierdzeniu z treści zadania, że odbija się na wysokość  $H$ . W rzeczywistości, dla konkretnego modelu odbicia (np. dla odbicia idealnie sprężystego),  $H$  jest funkcją parametrów  $v_0$  oraz  $h$ .

### Rozwiązanie alternatywne

Do równania (13) można dojść w nieco inny sposób.

Na układ dwóch zderzających się kul działają z zewnątrz następujące siły: siła reakcji podłoża  $N$ , siła tarcia między dużą kulą a podłożem  $T$  oraz siły grawitacji. Wpływ sił grawitacji w czasie trwania zderzenia jest pomijalny. Wobec tego wszystkie istotne siły zewnętrzne działające w czasie zderzenia są przyłożone w punkcie styku dużej kuli z podłożem. Oznacza to, że sumaryczny moment pędu obu kul względem tego punktu jest w czasie zderzenia zachowany.

Tuż przed zderzeniem porusza się jedynie mała kulka, której moment pędu względem punktu styku dużej kuli z podłożem wynosi

$$L_1 = mv_0 r \cos \alpha. \quad (15)$$

Powyżej przyjęliśmy konwencję, w której ruch odpowiadający obrotowi w prawo ma dodatni moment pędu.

Po zderzeniu, moment pędu małej kulki względem rozważanego punktu odniesienia wynosi

$$L_{2,m} = -mv_y r \cos \alpha + mv_x r (1 + \sin \alpha). \quad (16)$$

Ruch dużej kuli można opisać jako obrót wokół chwilowej osi przechodzącej przez punkt styku dużej kuli z podłożem. Z twierdzenia Steinera, moment bezwładności kuli względem tej osi jest równy

$$I_{\text{st}} = I + Mr^2 = \frac{7}{5} Mr^2. \quad (17)$$

Oznacza to, że moment pędu dużej kuli względem rozważanego punktu odniesienia tuż po zderzeniu wynosi

$$L_{2,M} = -I_{\text{st}} \omega = -\frac{7}{5} Mr^2 \cdot \frac{V}{r} = -\frac{7}{5} MVr. \quad (18)$$

Powyżej ujemny znak wynika z faktu, że kula toczy się w lewo. Ponieważ moment pędu względem punktu styku jest zachowany, mamy

$$L_1 = L_{2,m} + L_{2,M} \quad (19)$$

To równanie po uwzględnieniu wyrażen na  $L_1$ ,  $L_{2,m}$  oraz  $L_{2,M}$  prowadzi do

$$mr \cos \alpha \cdot (v_0 + v_y) = mv_x r (1 + \sin \alpha) - \frac{7}{5} M V r \quad (20)$$

Przekształcając równanie (3) z poprzedniej wersji rozwiązania, otrzymujemy  $v_0 + v_y = v_x \operatorname{tg} \alpha$ , co po wstawieniu do powyższego wzoru prowadzi do

$$0 = mv_x r - \frac{7}{5} M V r, \quad (21)$$

co jest równoważne wzorowi (13) z pierwotnego rozwiązania. Wzór na  $v_x$  można wyprowadzić tak jak w rozwiązaniu pierwotnym.

### Punktacja zadania 1.

Pionowa prędkość małej kulki tuż po zderzeniu (wzór (1) lub równoważny – wraz z wyprowadzeniem lub uzasadnieniem) ..... 1 pkt  
 Relacja między zmianą składowej  $x$  i zmianą składowej  $y$  prędkości małej kulki (wzór (3) lub równoważny – wraz z wyprowadzeniem lub uzasadnieniem) ..... 2 pkt  
 Relacja między prędkością dużej kulki po zderzeniu a składową poziomą prędkości małej kulki (wzór (13) lub równoważny – wraz z wyprowadzeniem) ..... 4 pkt  
 Jawny, poprawny wynik końcowy w postaci algebraicznej (wzór (14) lub równoważny – wraz z wyprowadzeniem) ..... 2 pkt  
 Jawny, poprawny wynik końcowy w postaci liczbowej ..... 1 pkt

### Rozwiązanie zadania 2

Skoro gęstość cieczy jest równa  $\rho$ , pochodząca od liny siła działająca na sondę przy powolnym wyciąganiu równa

$$F = m\gamma - V\rho\gamma, \quad (22)$$

gdzie  $\gamma$  jest natężeniem pola grawitacyjnego (przyspieszeniem grawitacyjnym) w miejscu, gdzie znajduje się sonda,  $m\gamma$  to siła grawitacyjna działająca na sondę, a  $V\rho\gamma$  to działająca na nią siła wyporu.

Praca niezbędna do przemieszczenia sondy od odległości  $r$  od środka planetoidy do odległości  $r + \Delta r$ , gdzie  $\Delta r$  jest bardzo małe, wynosi

$$\Delta W = F\Delta r. \quad (23)$$

Rozważmy wąską warstwę cieczy o powierzchni  $S$  (o rozmiarach liniowych znacznie mniejszych od  $r$  dzięki czemu można ją traktować jako płaską) zawartą między  $r$  a  $r + \Delta r$ . Masa tej warstwy wynosi  $\rho S\Delta r$ , a zatem siła grawitacyjna działająca na nią jest równa

$$\gamma\rho S\Delta r. \quad (24)$$

Ponieważ ciecz jest w równowadze, ta siła jest równoważona przez różnicę parć warstw położonych wyżej oraz niżej

$$\gamma\rho S\Delta r + S\Delta p = 0, \quad (25)$$

gdzie  $\Delta p = p(r + \Delta r) - p(r)$  jest zmianą ciśnienia przy zmianie odległości od środka planetoidy od  $r$  do  $r + \Delta r$ .

Stąd otrzymujemy

$$\gamma\rho\Delta r = -\Delta p. \quad (26)$$

Powyższe równanie można też otrzymać ze standardowego związku między ciśnieniem a głębokością  $h$  zanurzenia w cieczy

$$p = p_0 + \rho gh,$$

które co prawda obowiązuje tylko dla stałych  $\rho$  i  $g$ , jednak przy małych zmianach  $h$  można przyjąć że te parametry są stałe.

Zatem

$$\Delta W = (m\gamma - V\rho\gamma)\Delta r = \quad (27)$$

$$= \left(\frac{m}{\rho} - V\right)\gamma\rho\Delta r =$$

$$= -\left(\frac{m}{\rho} - V\right)\Delta p =$$

$$= -\left(\frac{m}{\rho} - V_0\right)\Delta p - V_0\alpha p\Delta p = \quad (28)$$

$$= -\left(\frac{m}{\rho} - V_0\right)\Delta p - \frac{1}{2}V_0\alpha\Delta(p^2). \quad (29)$$

Powyżej skorzystaliśmy, z tego, że

$$\begin{aligned} \Delta(p^2) &= (p + \Delta p)^2 - p^2 = \\ &= (2p + \Delta p)\Delta p, \end{aligned}$$

przy czym ponieważ  $\Delta p$  jest małe, można pominąć  $\Delta p$  w porównaniu z  $2p$ , a więc  $\Delta(p^2) \approx 2p\Delta p$ .

Ze wzoru (29) wynika, że całkowita praca wykonana przy powolnym przemieszczaniu sondy od głębokości na której panuje ciśnienie  $p_1$  do powierzchni (czyli miejsca, gdzie ciśnienie jest w przybliżeniu zerowe) jest równa

$$W = \left(\frac{m}{\rho} - V_0\right)p_1 + \frac{1}{2}V_0\alpha p_1^2. \quad (30)$$

Zauważmy jednak, że  $\Delta W$  może zmienić znak; taka zmiana znaku oznacza, że siła wyporu może stać się na pewnej głębokości większa od siły grawitacji – wtedy sonda zacznie wypływać na powierzchnię bez potrzeby ciągnięcia liny. Zmiana znaku następuje, gdy siła wyporu równoważy siłę grawitacji działającą na sondę; zachodzi to dla ciśnienia  $p_2$  spełniającego warunek

$$m - \rho V_0(1 - \alpha p_2) = 0, \quad (31)$$

czyli dla

$$p_2 = \frac{1 - m/(\rho V_0)}{\alpha}. \quad (32)$$

Zatem jeśli zachodzi  $p_1 > p_2 > 0$  (lub równoważnie  $m/\rho - V_0(1 - \alpha p_1) > 0$  oraz  $m/\rho - V_0 < 0$ ) to ze wzoru (29) wynika, że niezbędna praca jest równa

$$W = \left(\frac{m}{\rho} - V_0\right)(p_1 - p_2) + \frac{1}{2}V_0\alpha(p_1^2 - p_2^2) = \quad (33)$$

$$= \left(\frac{m}{\rho} - V_0\right)p_1 + \frac{1}{2}V_0\alpha p_1^2 + \frac{1}{2}\frac{V_0}{\alpha}\left(1 - \frac{m}{\rho V_0}\right)^2. \quad (34)$$

Co więcej, siła wyporu może być większa od siły grawitacji już od samego początku; oznacza to że minimalna praca jaką należy wykonać wyciągając sondę wynosi

$$W = \begin{cases} 0 & \text{gdy } \frac{m}{\rho} - V_0(1 - \alpha p_1) \leq 0, \\ \left(\frac{m}{\rho} - V_0\right)p_1 + \frac{1}{2}V_0\alpha p_1^2 + \frac{1}{2}V_0(1 - m/(\rho V_0))^2/\alpha & \text{gdy } \frac{m}{\rho} - V_0(1 - \alpha p_1) > 0 \text{ oraz } \frac{m}{\rho} - V_0 < 0, \\ \left(\frac{m}{\rho} - V_0\right)p_1 + \frac{1}{2}V_0\alpha p_1^2 & \text{gdy } \frac{m}{\rho} - V_0 \geq 0. \end{cases} \quad (35)$$

W przypadku danych z treści zadania mamy

$$\frac{m}{\rho} - V_0(1 - \alpha p_1) = 0,0014 \text{ m}^3 > 0 \text{ oraz } \frac{m}{\rho} - V_0 = -0,0005 \text{ m}^3 < 0,$$

zatem zachodzi drugi przypadek i otrzymujemy

$$W = 1,53 \cdot 10^4 \text{ J}. \quad (36)$$

b)

Masę skalnego jądra wyznaczymy korzystając z tego, że ma ona wpływ na zależność  $\gamma(r)$ , a zatem na  $p(r)$ . Aby wyznaczyć  $\gamma(r)$  skorzystamy z faktu, że natężenie pola grawitacyjnego odległości  $r$  od centrum sferycznie symetrycznego rozkładu masy jest takie jakby cała masa w odległości mniejszej lub równej  $r$  od tego centrum była skupiona w tym centrum, a masy w odległości większej od  $r$  nie było.

Masa zawarta w odległości  $r$  od środka planetoidy, w przypadku  $r_1 \leq r \leq R$ , jest równa

$$\frac{4}{3}\pi(r^3 - r_1^3)\rho + M,$$

Zatem zależność przyspieszenia grawitacyjnego od odległości od środka planetoidy jest dana wzorem

$$\gamma(r) = G\frac{4\pi\rho(r^3 - r_1^3)/3 + M}{r^2} = \quad (37)$$

$$= \frac{4\pi}{3}G\rho r + G\frac{M - 4\pi\rho r_1^3/3}{r^2}. \quad (38)$$

W takim razie wzór  $\Delta p = -\gamma\rho\Delta r$  przybierze postać

$$\Delta p = -\frac{4\pi}{3}G\rho^2 \cdot r\Delta r - G\rho\left(M - \frac{4\pi}{3}\rho r_1^3\right) \cdot \frac{1}{r^2}\Delta r. \quad (39)$$

Zauważmy, że ten wzór jest analogiczny do wzoru na zmianę energii potencjalnej przy przesunięciu o  $\Delta r$  w przypadku siły całkowitej będącej sumą siły proporcjonalnej do  $-r$  (dla której

energia potencjalna jest proporcjonalna do  $r^2/2$ ) oraz siły proporcjonalnej do  $-1/r^2$  (dla której energia potencjalna jest proporcjonalna do  $1/r$ ). Zatem

$$p(r = R) - p(r = r_1) = -\frac{2\pi}{3}G\rho^2(R^2 - r_1^2) + G\rho\left(M - \frac{4\pi}{3}\rho r_1^3\right)\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r_1}\right). \quad (40)$$

Ponieważ

$$\begin{aligned} p(r = R) &= 0, \\ p(r = r_1) &= p_1, \end{aligned}$$

otrzymamy

$$p_1 = \frac{2\pi}{3}G\rho^2(R^2 - r_1^2) + G\frac{4\pi}{3}\rho^2 r_1^3\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r_1}\right) - G\rho\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r_1}\right)M. \quad (41)$$

Stąd

$$GM\rho\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{R}\right) = p_1 - \frac{2\pi}{3}G\rho^2(R^2 - r_1^2) + \frac{4\pi}{3}G\rho^2 r_1^3\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{R}\right).$$

Zatem

$$M = \frac{p_1/(G\rho) - \frac{2\pi}{3}\rho(R^2 - r_1^2) + \frac{4\pi}{3}\rho r_1^3\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{R}\right)}{1/r_1 - 1/R} = \quad (42)$$

$$= \frac{p_1 R r_1}{G\rho(R - r_1)} - \frac{2\pi}{3}\rho((R + r_1)Rr_1 - 2r_1^3). \quad (43)$$

Dla danych liczbowych z treści zadania otrzymujemy

$$M = 1,13 \cdot 10^{20} \text{ kg}. \quad (44)$$

## Punktacja zadania 2.

Siła działająca na sondę (wzór (22) lub równoważny – wraz z uzasadnieniem) ..... 1 pkt

Praca wykonana przy małym przemieszczeniu sondy (wzór (28) lub równoważny – wraz z wyprowadzeniem lub uzasadnieniem) ..... 1 pkt

Zauważenie, że siła działająca na sondę może zmieniać znak i wyznaczenie położenia lub ciśnienia temu odpowiadającego (wzór (32) lub równoważny – wraz z wyprowadzeniem) ..... 1 pkt

Szukana praca (wzór (35) lub równoważny) ..... 1 pkt

Szukana praca w postaci liczbowej (wzór (36)) ..... 1 pkt

Przyspieszenie grawitacyjne w zależności od odległości od środka planetoidy (wzór (38) lub równoważny – wraz z wyprowadzeniem) ..... 1 pkt

Związek między ciśnieniem na powierzchni jądra a ciśnieniem tuż pod powierzchnią planetoidy (wzór (40) lub równoważny – wraz z wyprowadzeniem/uzasadnieniem) ... 2 pkt

Szukana masa skalnego jądra (wzór (43) lub równoważny – wraz z wyprowadzeniem) 1 pkt

Szukana masa skalnego jądra w postaci liczbowej (wzór (44)) ..... 1 pkt

**Rozwiązanie zadania 3**

Ponieważ układ ma symetrię polegającą na obrocie wokół osi graniastosłupa o kąt  $2\pi/N$  i jednoczesnej zmianie fazy płynących prądów o  $2\pi/N$ , wystarczy rozważyć tylko siłę działającą na przewód 1 oraz ruch tego przewodu.

Siła na jednostkę długości przewodu 1, z jaką przyciąga go przewód  $k$  wynosi

$$F_{1k} = \frac{\mu_0 I_1 I_k}{2\pi d_{1k}}, \quad (45)$$

gdzie  $d_{1k}$  jest odległością między rozważanymi przewodami. Z rozważań geometrycznych wynika, że

$$d_{1k} = 2R \sin \frac{\alpha_{1k}}{2}. \quad (46)$$

Powyżej  $\alpha_{1k} = 2\pi(k-1)/N$ , natomiast  $R$  jest odległością przewodu od osi graniastosłupa równą

$$R = \frac{d}{2 \sin(\pi/N)}. \quad (47)$$

Składowa radialna siły  $F_{1k}$  wynosi

$$F_{1k R} = -F_{1k} \sin \frac{\alpha_{1k}}{2}. \quad (48)$$

W powyższym wzorze znak minus odpowiada temu, że jeśli  $F_{1k}$  jest dodatnie, to siła działająca na przewód jest skierowana do osi graniastosłupa, a więc przeciwnie do dodatniego odchylenia przewodu.

Po uwzględnieniu wzorów na  $F_{1k}$  oraz  $d_{1k}$  otrzymamy

$$F_{1k R} = -\frac{\mu_0 I_1 I_k}{4\pi R}. \quad (49)$$

Zauważmy, że mianownik powyższego wyrażenia nie zależy od  $k$ .

Całkowita radialna składowa siły magnetycznej działającej na przewód 1 jest równa

$$F_{1 R} = -\frac{\mu_0 I_1}{4\pi R} \sum_{k=2}^N I_k = \quad (50)$$

$$= -\frac{\mu_0 I_1}{4\pi R} \sum_{k=2}^N I_0 \cos\left(\omega t + k \frac{2\pi}{N}\right). \quad (51)$$

Z interpretacji geometrycznej podanej w treści zadania wynika, że

$$\sum_{k=1}^N I_0 \cos\left(\omega t + k \frac{2\pi}{N}\right) = 0, \quad (52)$$

ponieważ jest to składowa sumy  $N$  wektorów tej samej długości, przy czym sąsiednie są obrócone względem siebie o kąt  $2\pi/N$  – jeśli koniec poprzedniego wektora pokrywa się z początkiem następnego to otrzymamy  $N$ -kąć foremny.

Stąd otrzymamy

$$\sum_{k=2}^N I_0 \cos\left(\omega t + k \frac{2\pi}{N}\right) = \sum_{k=1}^N I_0 \cos\left(\omega t + k \frac{2\pi}{N}\right) - I_0 \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{N}\right) = \quad (53)$$

$$= -I_0 \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{N}\right). \quad (54)$$

Zatem

$$F_{1R} = \frac{\mu_0}{4\pi R} I_0^2 \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{N}\right) \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{N}\right) = \quad (55)$$

$$= \frac{\mu_0}{8\pi R} I_0^2 \left(\cos\left(2\omega t + \frac{4\pi}{N}\right) + 1\right). \quad (56)$$

Równanie ruchu (radialnego) przewodu 1 jest zatem następujące

$$\lambda \frac{d^2 x}{dt^2} = -Kx + \frac{\mu_0}{8\pi R} I_0^2 \left(\cos\left(2\omega t + \frac{4\pi}{N}\right) + 1\right). \quad (57)$$

gdzie  $x$  jest radialnym odchyleniem przewodu 1 od odpowiadającej mu krawędzi graniastosłupa. Położenie równowagi odpowiada

$$x_0 = \frac{\mu_0}{8\pi K R} I_0^2. \quad (58)$$

Podstawiając

$$x = x_0 + A \cos\left(2\omega t + \frac{4\pi}{N}\right), \quad (59)$$

otrzymamy równanie

$$-\lambda (2\omega)^2 A \cos\left(2\omega t + \frac{4\pi}{N}\right) = -K A \cos\left(2\omega t + \frac{4\pi}{N}\right) + \frac{\mu_0}{8\pi R} I_0^2 \cos\left(2\omega t + \frac{4\pi}{N}\right). \quad (60)$$

Stąd stała  $A$  odpowiadająca drganiom stacjonarnym (zgodnie ze wzorem podanym w treści zadania) wynosi

$$A = \frac{\mu_0 I_0^2 / (8\pi R)}{K - \lambda (2\omega)^2}. \quad (61)$$

Wzór (59) dotyczy tylko przewodu 1, jednak wzory na  $x_0$  oraz  $A$  będą takie same dla każdego przewodu (jedynie faza drgań będzie zależała od numeru przewodu).

Wartość bezwzględna powyżej wielkości, czyli w jawnej postaci (po podstawieniu wzoru (47))

$$|A| = \frac{\mu_0 I_0^2 \sin(\pi/N)}{4\pi d |K - \lambda (2\omega)^2|}, \quad (62)$$

jest szukaną amplitudą drgań radialnych, natomiast wyznaczone położenie równowagi  $x_0$ , w jawnej postaci równe

$$x_0 = \frac{\mu_0 \sin(\pi/N)}{4\pi K d} I_0^2, \quad (63)$$

jest szukanym średnim odchyleniem od krawędzi graniastosłupa. Zauważmy, że  $x_0 > 0$ , zatem średnie położenie każdego przewodu oddala się od osi graniastosłupa.

Dla  $\omega$  dążącego do  $\sqrt{K/\lambda}/2$  amplituda  $|A|$  dąży do nieskończoności – mamy do czynienia z rezonansem. Zatem rezonans odpowiada

$$\omega = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{K}{\lambda}}. \quad (64)$$

### Punktacja zadania 3.

Elektrodynamiczna siła na jednostkę długości przewodu pochodząca od wybranego innego przewodu (wzór (45) lub równoważny – wraz z uzasadnieniem) ..... 1 pkt  
 Odległość między wybranymi przewodami wyrażona przez kąt i odległość  $R$  (wzór (46) lub równoważny – wraz z wyprowadzeniem lub uzasadnieniem) ..... 1 pkt  
 Radialna składowa siły pochodzącej od pojedynczego przewodu kąta i (wzór (48) lub równoważny – wraz z uzasadnieniem/rysunkiem) ..... 1 pkt  
 Radialna sumaryczna siła na jednostkę długości przewodu pochodząca od pozostałych przewodów (wzór (50) lub równoważny) ..... 1 pkt  
 Radialna sumaryczna siła na jednostkę długości przewodu pochodząca od pozostałych przewodów po wykonaniu sumowania (wzór (55) lub równoważny) ..... 1 pkt  
 Radialna sumaryczna siła na jednostkę długości przewodu pochodząca od pozostałych przewodów w postaci pozwalającej na zastosowanie wskazówki o amplitudzie (wzór (56) lub równoważny) ..... 1 pkt  
 Położenie równowagi/średnie odchylenie od krawędzi graniastosłupa (wzór (63) lub równoważny – wraz z uzasadnieniem; niezbędny jest poprawny znak lub słowne określenie zwrotu średniego odchylenia) ..... 1 pkt  
 Szukana amplituda drgań (wzór (62) lub równoważny – wraz z uzasadnieniem) ..... 2 pkt  
 Warunek zachodzenia rezonansu (wzór (64) lub równoważny – wraz z uzasadnieniem) 1 pkt