LXXV OLIMPIADA FIZYCZNA

ZAWODY II STOPNIA

CZĘŚĆ DOŚWIADCZALNA, 15.02.2026 r.

Za zadanie można otrzymać maksymalnie 40 punktów.

Masz do dyspozycji:

- statyw z poprzeczką,
- dwa ściski stolarskie,
- rurkę aluminiową,
- wstążkę,
- stalową nakrętkę,
- miarkę krawiecką,
- chusteczki higieniczne.

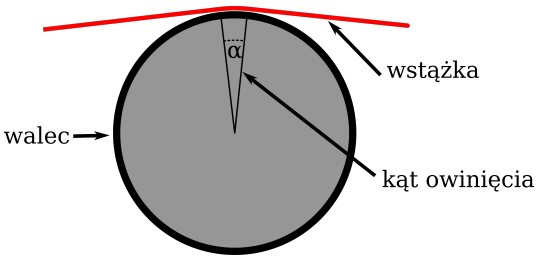
Wyznacz współczynnik tarcia statycznego oraz współczynnik tarcia kinetycznego pomiędzy rurką a wstążką.

UWAGA 1: Dokładnie wyczyść rurkę przed wykonaniem pomiarów, zabrudzenia mogą znacząco wpłynąć na wyniki.

UWAGA 2: Zwróć szczególną uwagę, aby do pomiarów wykorzystywać wstążkę, która nie jest w widocznym stopniu przetarta – może to wpłynąć na wyniki! W razie potrzeby poproś organizatorów o wymianę wstążki na nową.

UWAGA 3: W niektórych miejscach rurka może być nieznacznie porysowana. Staraj się używać jak najmniej porysowanych fragmentów rurki.

UWAGA 4: W sytuacji, w której wiotka wstążka przylega do powierzchni bocznej walca i jest naciągnięta po obu stronach nawinięcia, wyznaczenie siły tarcia pomiędzy wstążką a walcem jest dosyć skomplikowane. Jeżeli jednak kąt owinięcia α (patrz rysunek poniżej) jest **niewielki**, a siła tarcia jest niewielka w porównaniu z siłą naciągu, siłę tarcia można wyznaczyć zgodnie z odpowiednim standardowym wzorem, gdzie siła nacisku wywierana przez wstążkę na walec jest w przybliżeniu równa sile wypadkowej otrzymanej przez dodanie do siebie wektorów obu sił naciągu. Przybliżenie to jest poprawne nawet wtedy, gdy wstążka przebiega skośnie względem osi walca.



W rozwiązaniu zadania mogą Ci się przydać poniższe przybliżenia, poprawne gdy $|x| \ll 1$:

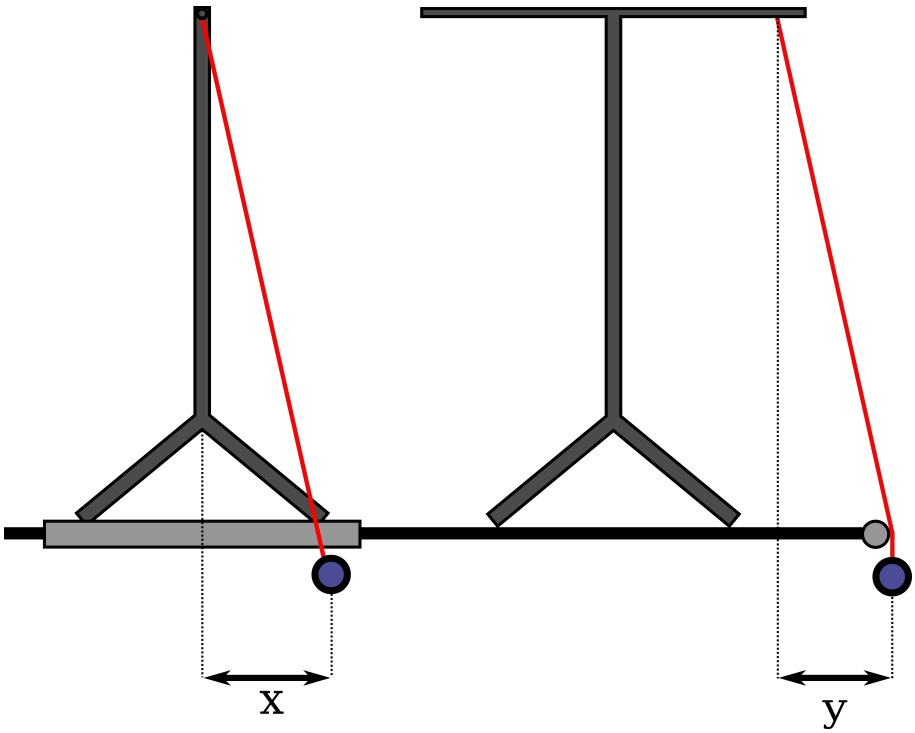
$$(1+x)^{\alpha} \approx 1 + \alpha x,$$

$$\sin x \approx x, \quad \cos x \approx 1, \quad \operatorname{tg} x \approx x.$$

Rozwiązanie

Jednym z najprostszych pomysłów na wykorzystanie elementów zestawu jest skonstruowanie wahadła ze statywu, wstążki i nakrętki, gdzie nakrętka pełniła będzie rolę ciężarka. Oczywiście, zadanie polega na znalezieniu odpowiednich współczynników tarcia, więc w układzie pomiarowym powinno dojść do kontaktu pomiędzy wstążką i rurką. Kontakt taki można wprowadzić do układu przez przyłożenie rurki do wstążki, na której wisi wahadło. Wówczas, po wytrąceniu wahadła z najniższego położenia, wstążka i rurka będą o siebie trzeć. Schemat proponowanego układu przedstawiony jest na Rysunku 1.

Warto zwrócić szczególną uwagę na fakt, że przyłożenie rurki powoduje zmianę płaszczyzny drgań wahadła, tzn. najniższe położenie podpartego wahadła jest inne niż najniższe położenie wahadła zwisającego swobodnie. W dalszej części rozwiązania odległość pomiędzy tymi dwoma położeniami wahadła oznaczymy jako y. Wychylenie wahadła wzdłuż rurki będziemy natomiast oznaczali jako x.



Rysunek 1: Schemat układu wahadła odchylonego za pomocą rurki. Na lewej części rysunku widok układu „od przodu” z zaznaczonym wychyleniem wahadła x. Na prawej części rysunku widok tego samego układu „z boku” z zaznaczonym odchyleniem wahadła y powstałym na skutek przyłożenia rurki do wstążki

Wychylając wahadło można dokonać dwóch obserwacji. Gdy wahadło wychylimy nieznacznie i puścimy je tak, aby nie poruszało się względem rurki, może okazać się, że wahadło nie zacznie się samoistnie zsuwać pod wpływem siły grawitacji. Będzie to spowodowane statycznym tarciem wstążki o rurkę. Gdy natomiast wychylenie wahadła będzie większe, wahadło zacznie się poruszać pod wpływem grawitacji, a pomiędzy wstążką i rurką pojawi się tarcie kinetyczne. Porównując ruch takiego wahadła do wahadła bez przyłożonej rurki można zauważyć, że siła tarcia jest znacznie większa niż pozostałe siły oporów. Powyższe obserwacje wykorzystamy w celu wyznaczenia współczynników tarcia statycznego i kinetycznego.

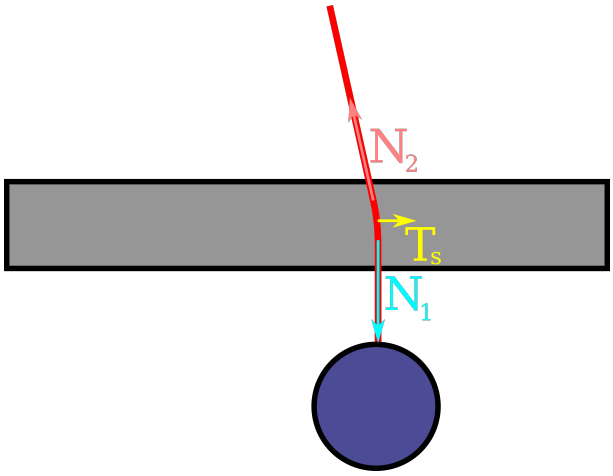
W opisie teoretycznym układu przyjmiemy założenia, które standardowo przyjmuje się do opisu drgań wahadła matematycznego, tzn. wstążka jest nieważka i nierozciągliwa, a ciężarek

jest punktem materialnym. Co więcej, wahadło będziemy wychylać o małe kąty. Dodatkowo, położenie rurki i długość wahadła zostaną dobrane w taki sposób, aby ciężarek znajdował się jak najbliżej rurki (ale tak, aby w żadnym pomiarze nie zahaczał o rurkę).

Wyznaczenie współczynnika tarcia statycznego

Zgodnie z poczynioną wcześniej obserwacją, wyznaczenie współczynnika tarcia statycznego będzie opierać się na znajdowaniu takiego największego wychylenia wahadła x, dla którego nie zacznie się ono samoistnie zsuwać. Siła tarcia statycznego skierowana jest przeciwnie do sumy pozostałych sił działających w układzie, a więc przeciwnie do kierunku, w którym wahadło zacznie poruszać się po wytrąceniu z sytuacji statycznej. Ponieważ wahadło wychylone jest o mały kąt, ruch ten w przybliżeniu będzie poziomy, a więc poziomy będzie również kierunek działania sił tarcia.

Rozważmy siły działające na fragment wstążki przylegający do rurki. Poza siłą tarcia są to siła reakcji rurki oraz dwie siły naciągu. W sytuacji statycznej może okazać się, że siły naciągu różnią się co do wartości. Oznaczmy więc, że siła naciągu działająca od strony ciężarka to N_1, natomiast siła działająca od strony statywu to N_2. Kierunek wektora siły reakcji rurki będzie prostopadły do powierzchni kontaktu rurki i wstążki, a więc dla małego kąta nawinięcia, podobnie jak siła tarcia, będzie w przybliżeniu poziomy. Schemat przedstawiający wahadło w sytuacji statycznej znajduje się na Rysunku 2.



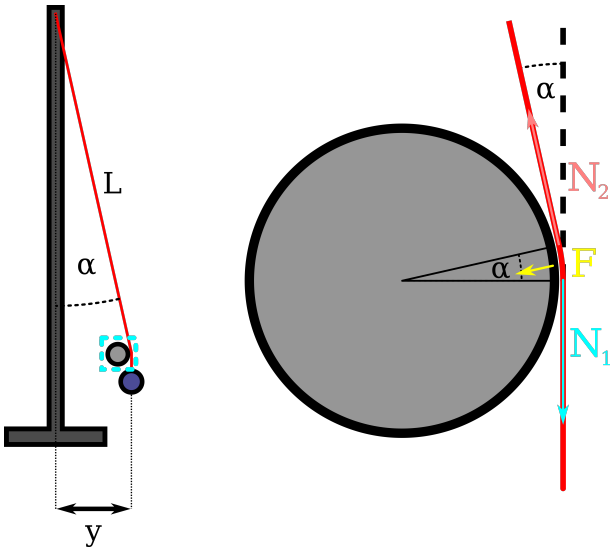
Rysunek 2: Schemat układu w sytuacji statycznej wraz z działającymi na wstążkę siłami (z pominięciem siły reakcji rurki, która jest prostopadła do płaszczyzny rysunku)

Siła N_2 musi równoważyć sumę siły N_1, siły tarcia oraz siły reakcji rurki. Te trzy siły są z kolei prostopadłe do siebie nawzajem. Oznacza to, że składowa siły N_2 w kierunku zgodnym z kierunkiem osi rurki musi równoważyć się z siłą tarcia. Stąd siła tarcia wynosi

$$T_s = N_2 \frac{x}{L}, \tag{1}$$

gdzie L jest odległością pomiędzy punktem mocowania wstążki do statywu oraz puntem kontaktu wstążki z rurką.

Z drugiej strony możemy skorzystać ze wskazówki podanej w Uwadze 3 i uzależnić wartość siły nacisku wstążki na rurkę (a więc również siłę tarcia) od sił naciągu nici. Oznaczmy kąt owinięcia wstążki wokół rurki jako α. Zauważmy, że kąt ten będzie taki sam jak kąt, o jaki



Rysunek 3: Na lewym rysunku schemat wahadła widzianego „z boku” wraz z przyjętymi w rozwiązaniu oznaczeniami. Po prawej zbliżenie na fragment oznaczony na pierwszym rysunku ramką wraz z rozrysowanymi siłami naciągu wstążki oraz siłą nacisku, którą wstążka wywiera na rurkę

wahadło jest odchylone przez rurkę. Schemat układu z oznaczonymi kątami oraz siłami znajduje się na Rysunku 3.

Po dodaniu do siebie wektorów obu sił naciągu i przemnożeniu przez współczynnik tarcia statycznego f_s otrzymujemy siłę tarcia

$$T_s = f_s N_2 \sin\alpha \approx f_s N_2 \alpha \approx f_s N_2 \frac{y}{L}, \tag{2}$$

gdzie α wyrażony jest w radianach, druga równość to przybliżenie podane w treści zadania, natomiast ostatnia równość wynika z definicji kąta w mierze łukowej. Przyrównując do siebie równania (1) i (2) otrzymujemy

$$N_2 \frac{x}{L} = f_s N_2 \frac{y}{L}. \tag{3}$$

Po przekształceniu daje to

$$x = f_s y. \tag{4}$$

Oznacza to, że maksymalne wychylenie przy którym wahadło nie zacznie się poruszać pod wpływem siły grawitacji zależy tylko od y oraz współczynnika tarcia statycznego pomiędzy wstążką i rurką. Jest to zależność, która umożliwi nam eksperymentalne wyznaczenie współczynnika tarcia statycznego.

Wyznaczenie współczynnika tarcia kinetycznego

Przyjmijmy, że wahadło jest w ruchu. Na ruch ten wpływ mają siła grawitacji, siła naciągu wstążki oraz siła tarcia kinetycznego. Kierunek działania siły tarcia jest przeciwny do wektora prędkości wahadła. Jeżeli kąt wychylenia wahadła jest mały, to ruch ciężarka w pionie jest znacznie mniejszy niż jego ruch w poziomie, zatem wektor prędkości (więc również wektor siły tarcia) będzie w przybliżeniu poziomy. Co więcej, podobnie jak w przypadku statycznym, kąt owinięcia wstążki wokół rurki będzie zależał wyłącznie od kąta α.

Ponownie korzystając ze wskazówki podanej w treści zadania możemy wyznaczyć zależność pomiędzy siłą naciągu wstążki N (tym razem taką samą na całej długości wstążki) oraz siłą nacisku F wywieraną na rurkę przez wstążkę. Dodając do siebie wektorowo siły naciągu po obu stronach walca (patrz prawa część Rysunku 3) możemy wyznaczyć siłę nacisku jako

$$F = 2N \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \approx N\alpha \approx N\frac{y}{L}, \tag{5}$$

gdzie ponownie najpierw wykorzystano przybliżenie podane w treści zadania, a następnie definicję kąta w mierze łukowej. W przybliżeniu ciężarek nie porusza się w kierunku pionowym, więc siła naciągu wstążki musi równoważyć ciężar ciężarka, zatem

$$N = mg, \tag{6}$$

gdzie m jest masą ciężarka, natomiast g to przyspieszenie ziemskie. Stąd otrzymujemy, że siła tarcia kinetycznego w układzie wynosi

$$T_k = f_k mg\frac{y}{L}, \tag{7}$$

gdzie f_k jest współczynnikiem tarcia kinetycznego.

Dla ustalonej wartości odchylenia y wartość tej siły jest stała. Oznacza to, że jeżeli jako A_1 oraz A_2 oznaczymy dwa kolejne maksymalne wychylenia wahadła, to podczas ruchu pomiędzy nimi siła tarcia wykona pracę o wartości

$$W = (A_1 + A_2)\, T_k = (A_1 + A_2)\, f_k mg\frac{y}{L}. \tag{8}$$

Z położeniami A_1 oraz A_2 możemy również powiązać pewną energię potencjalną grawitacji. Jeżeli dla wahadła w położeniu o minimalnej energii potencjalnej odległość pomiędzy punktem przymocowania wstążki do statywu oraz punktem styku wstążki z rurką wynosi L, to po wychyleniu wahadła o x odległość pomiędzy tymi punktami wyniesie na mocy twierdzenia Pitagorasa $\sqrt{L^2 + x^2}$. Wykorzystując pierwsze z przybliżeń podanych w treści zadania możemy więc wyznaczyć, że wychylenie wahadła o x powoduje wzrost jego energii potencjalnej o

$$E(x) = mg\left(\sqrt{L^2 + x^2} - L\right) = mgL\left(\sqrt{1 + \frac{x^2}{L^2}} - 1\right) \approx \frac{mgx^2}{2L}. \tag{9}$$

Stąd zmiana energii wahadła przy zmianie amplitudy z A_1 na A_2 wynosi

$$\Delta E = \frac{mgA_1^2}{2L} - \frac{mgA_2^2}{2L} = \frac{mg}{2L}\,(A_1 - A_2)\,(A_1 + A_2)\,. \tag{10}$$

Zmiana ta jest związana wyłącznie z pracą wykonaną przez tarcie

$$\frac{mg}{2L}\,(A_1 - A_2)\,(A_1 + A_2) = (A_1 + A_2)\, f_k mg\frac{y}{L}. \tag{11}$$

Z tej równości wyznaczamy zależność pomiędzy zmianą amplitudy drgań oraz y

$$\Delta A = A_1 - A_2 = 2f_k y. \tag{12}$$

Tę zależność można wykorzystać do pomiaru współczynnika tarcia kinetycznego.

Pierwszy pomysł na pomiar tarcia kinetycznego

Dla kolejnych wartości y będziemy puszczać wahadło z tego samego wychylenia początkowego A_1. Na podstawie liczby półokresów wykonanych aż do zatrzymania się wahadła możemy oszacować wartość ΔA. Jeżeli liczba takich półokresów wynosi n, to zmiana amplitudy na jeden półokres wyniesie

$$\Delta A = \frac{A_1}{n}. \tag{13}$$

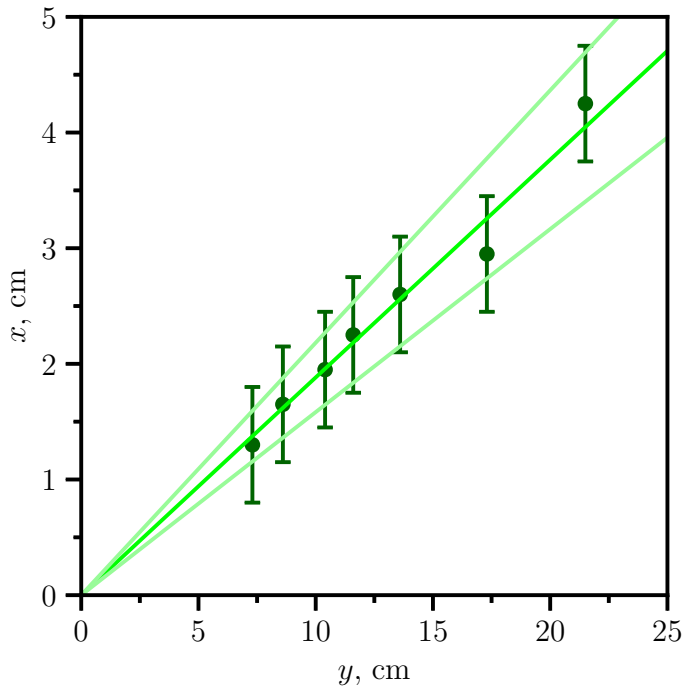
Zgodnie ze wzorem (12) wielkość ta powinna liniowo zmieniać się wraz z y, a współczynnikiem kierunkowym tej zależności jest $2f_k$.

Drugi pomysł na pomiar tarcia kinetycznego

Alternatywnie można dla kolejnych wartości y dobierać wartość A_1 w taki sposób, żeby wahadło zatrzymało się dokładnie w położeniu o minimalnej energii potencjalnej ani razu go nie przekraczając (czyli $A_2 = 0$). Wówczas równanie (12) upraszcza się do zależności liniowej pomiędzy A_1 oraz y.

Układ pomiarowy i wyniki pomiarów

Jeden koniec wstążki przywiązano do poprzeczki statywu, natomiast do drugiego końca przywiązano stalową nakrętkę. Za pomocą ścisków stolarskich do krawędzi stołu przymocowano rurkę aluminiową w taki sposób, że możliwe było oparcie wstążki o rurkę bez zahaczania o stół. Wstążka została przywiązana do statywu i nakrętki w taki sposób, aby nakrętka nie zahaczała o rurkę w czasie wykonywania pomiarów, ale w taki sposób, żeby odległość pomiędzy rurką i nakrętką była możliwie mała.

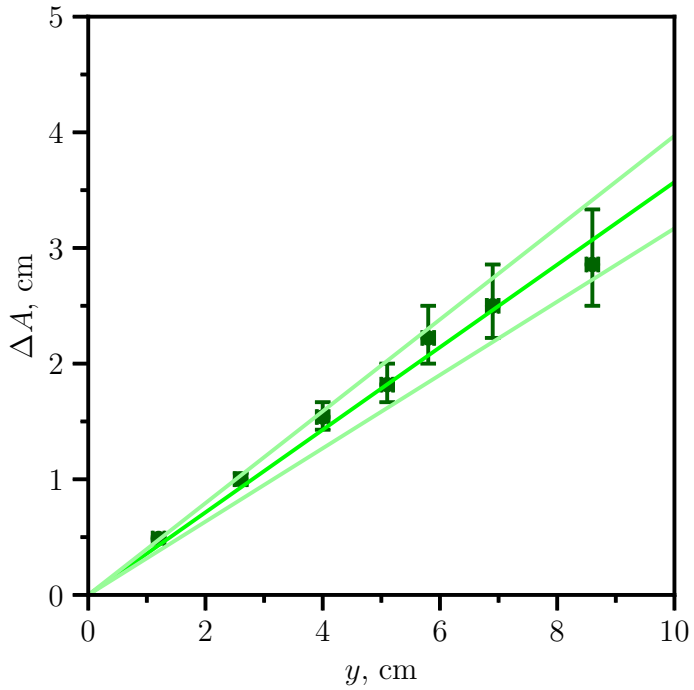


Rysunek 4: Wykres z punktami pomiarowymi, dopasowaną zależnością liniową oraz prostymi skrajnymi

Za pomocą takiego układu wykonano pomiary pozwalające na wyznaczenie obu współczynników tarcia. Zmianę wartości y realizowano przez przesuwanie miejsca przywiązania wstążki do statywu wzdłuż poprzeczki. Przed każdym pomiarem rurka została przetarta za pomocą chusteczek higienicznych. Wyniki pomiarów pozwalających na wyznaczenie współczynnika tarcia statycznego przedstawiono na Rysunku 4.

Dokładne wykonanie tych pomiarów może okazać się wyzwaniem ze względu na możliwość przejścia tarcia statycznego w kinetyczne nawet przy najdrobniejszym drganiu ciężarka, a to z kolei może w znacznym stopniu utrudnić pomiar granicznej wartości x. Co więcej, jakakolwiek niedokładność przy zmianie wartości y może spowodować zmianę położenia minimum energii potencjalnej względem rurki, a więc także wpłynie na pomiar wychylenia x. W celu ograniczenia niepewności pomiarowych dla każdej wartości y wykonano dwa pomiary, po jednym dla wahadła wychylonego w lewo i w prawo. Za wartość x przyjęto średnią arytmetyczną z takich dwóch pomiarów. Ze względu na wymienione wyżej trudności, za niedokładność pomiarową x przyjęto 5 mm. Za niedokładność pomiaru y przyjęto dokładność podziałki na miarce, czyli 1 mm. Otrzymana wartość współczynnika tarcia statycznego wynosi $f_s = 0,19 \pm 0,03$.

Następnie wykonano pomiary tarcia kinetycznego. Wykorzystano w nich pierwszą z zaproponowanych w części teoretycznej metod. Wyniki tych pomiarów wraz z dopasowaną do nich prostą znajdują się na Rysunku 5.



Rysunek 5: Wykres z punktami pomiarowymi, dopasowaną zależnością liniową oraz prostymi skrajnymi

Do punktów pomiarowych dopasowano funkcję liniową zgodną ze wzorem (12). Za niedokładność pomiaru wartości y przyjęto 1 mm, natomiast niedokładność pomiaru ΔA obliczono jako zmianę której uległaby wartość ΔA gdyby n zmieniło się o 1. O ile sam pomiar wartości n jest dokładny, o tyle możliwa jest sytuacja, że zmiana wartości x w granicy niepewności pomiarowej (tutaj przyjętej za 1 mm) może spowodować zmianę n. Jest to szczególnie istotne, gdy n jest małe, wówczas oszacowanie na ΔA wynikające ze wzoru (13) jest niedokładne. Otrzymana wartość współczynnika tarcia kinetycznego wynosi $f_k = 0,17 \pm 0,02$.