

# LXXV OLIMPIADA FIZYCZNA

## ZAWODY II STOPNIA

CZĘŚĆ TEORETYCZNA, 11.01.2026

Za każde zadanie można otrzymać maksymalnie 20 punktów.

### Zadanie 1

Baron Münchhausen postanowił wznieść się jak najwyżej wykorzystując armatkę wyrzeliwującą pionowo w górę pocisk o masie  $m$  z prędkością  $v_0$ . Baron trzyma w rękach kołowrotek z częściowo nawiniętą nierozciągliwą, wiotką, nieważką liną, której drugi koniec jest przymocowany do pocisku. Kołowrotek ma wbudowany hamulec powodujący, że w trakcie rozwijania liny jej naprężenie wynosi  $N_0$  (gdy naprężenie jest mniejsze od  $N_0$  lina się nie rozwija, a długość rozwiniętej części pozostaje stała). Początkowa długość rozwiniętej części liny wynosi  $l_0$ . Barona potraktuj jako bryłę sztywną o masie  $M$ .

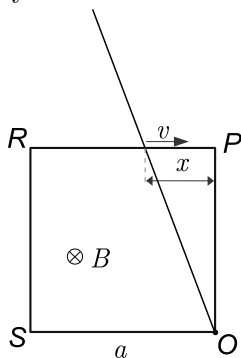
Na jaką maksymalną wysokość wznieść się baron, zakładając, że całkowita długość liny jest wystarczająco duża. Dodatkowo wyznacz ciepło, jakie wydzieli się na kołowrotku w trakcie wznoszenia się barona.

Pomiń rozmiary liniowe barona, armatki i pocisku oraz opór powietrza. Przyspieszenie ziemskie wynosi  $g$ . Początkowo baron znajduje się tuż obok armatki; zakładamy, że pocisk nie uderza w niego.

Podaj wyniki liczbowe dla  $m = 10$  kg,  $M = 80$  kg,  $l_0 = 5$  m,  $v_0 = 200$  m/s,  $N_0 = 8000$  N. Przyjmij  $g = 9,81$  m/s<sup>2</sup>.

### Zadanie 2

Wykonana z przewodnika o oporności na jednostkę długości  $\lambda$ , sztywna ramka w kształcie kwadratu o wierzchołkach  $OPRS$  i boku długości  $a$  znajduje się w prostopadłym do jej powierzchni zewnętrznym, stałym polu magnetycznym o indukcji  $B$ . Ramka styka się z prostoliniowym przewodnikiem (prętą) o długości  $2a$ , o oporności na jednostkę długości również  $\lambda$ . Jeden koniec pręta jest zamocowany przegubowo w rogu ramki  $O$ , a punkt styku pręta z ramką przesuwa się po boku  $RP$  z prędkością  $v$ , w kierunku wierzchołka  $P$ , patrz rysunek.



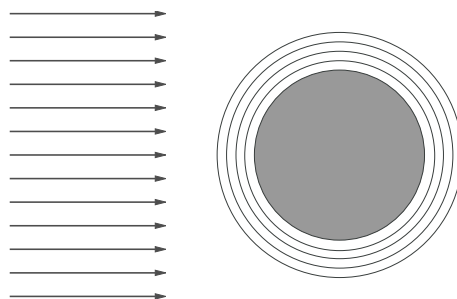
Rozważając chwilę, gdy punkt styku pręta z ramką znajduje się w odległości  $x$  od wierzchołka  $P$ , wyznacz:

- natężenie prądu płynącego przez część pręta znajdującą się wewnątrz ramki;
- moc niezbędną do obracania pręta.

Pomiń pole magnetyczne pochodzące od prądów płynących w rozważanym obwodzie i opory elektryczne w miejscach styku pręta z ramką. Pomiń też masę pręta oraz tarcie i inne opory mechaniczne.

### Zadanie 3

Rozważmy uproszczony model efektu cieplarnianego. Planeta o promieniu  $r$  krąży po kołowej orbicie o promieniu  $R \gg r$  wokół gwiazdy o promieniu znacznie mniejszym od  $R$ , emitującej izotropowo (tzn. jednakowo we wszystkich kierunkach) promieniowanie o całkowitej mocy  $P_g$ . Atmosferę planety modelujemy poprzez  $n$  cienkich, sferycznych powłok termicznych (nazywanych w astrofizyce „szklanymi”), współśrodkowych z planetą, patrz rysunek (proporcje nie są zachowane).



Przyjmujemy następujące założenia:

- Promieniowanie planety, powłok oraz gwiazdy jest promieniowaniem ciała doskonale czarnego.
- Gwiazda jest znacząco bardziej gorąca, niż powłoki oraz planeta, co jest uwzględnione w następnym punkcie.
- Powłoki są całkowicie przezroczyste dla promieniowania wysyłanego przez gwiazdę (w większości widzialnego), a jednocześnie całkowicie absorbują promieniowanie (w większości podczerwone) wysyłane przez sąsiednie powłoki, oraz –

w przypadku pierwszej powłoki – przez planetę. Powłoki są również całkowicie przezroczyste dla promieniowania gwiazdy odbitego od planety (odbicie zachodzi bez zmiany długości fali).

4. Planeta całkowicie absorbuje promieniowanie (w większości podczerwone) pochodzące od znajdującej się nad nią powłoki, natomiast odbija ułamek  $A$  promieniowania (w większości widzialnego) pochodzącego od gwiazdy. Resztę promieniowania pochodzącego od gwiazdy planeta absorbuje.
5. Planeta oraz powłoki idealnie przewodzą ciepło. Przestrzenie między poszczególnymi sferami i między wewnętrzną sferą a planetą nie prze-

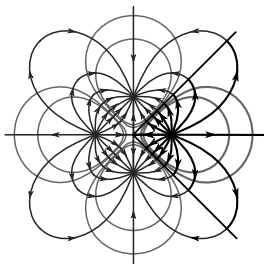
wodzą ciepła.

6. Powłoki znajdują się bardzo blisko siebie i blisko planety – odległość między górną powłoką a powierzchnią planety jest zanedbywalnie mała w porównaniu z promieniem planety.

Wyznacz ogólny wzór na równowagową temperaturę planety.

Podaj wynik liczbowy dla  $P_g = 3,8 \cdot 10^{26}$  W,  $r = 6 \cdot 10^6$  m,  $R = 10^{11}$  m,  $n = 120$ ,  $A = 0,8$ .

Moc promieniowania emitowanego przez powierzchnię  $S$  ciała doskonale czarnego o temperaturze  $T$  wynosi  $P = \sigma ST^4$ , gdzie  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$  W/(m<sup>2</sup> K<sup>4</sup>) jest stałą Stefana-Boltzmannna.



# LXXV OLIMPIADA FIZYCZNA

## ROZWIĄZANIA ZADAŃ ZAWODÓW II STOPNIA

### CZĘŚĆ TEORETYCZNA

#### Rozwiązanie zadania 1

Po osiągnięciu przez pocisk wysokości  $l_0$  lina zostaje napięta, a siła naprężenia podrywa barona do góry, jednocześnie spowalniając wznoszenie się pocisku.

Prędkość pocisku  $v_1$  tuż przed osiągnięciem wysokości  $l_0$  można wyznaczyć z zasady zachowania energii

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgl_0 + \frac{1}{2}mv_1^2, \quad (1)$$

zatem

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2gl_0}. \quad (2)$$

Oczywiście jeśli

$$v_0^2 < 2gl_0, \quad (3)$$

to baron się nie wzniesie, gdyż lina nie zostanie naprężona – pocisk wzniesie się tylko na wysokość mniejszą od  $l_0$  (równą  $v_0^2/(2g)$ ).

Po naprężeniu liny, na barona działa lina oraz grawitacja; siła wypadkowa jest równa

$$F_{1B} = N_0 - Mg. \quad (4)$$

Ponieważ ta siła jest stała, prędkość  $v_B$  oraz wysokość  $y_B$  barona w zależności od czasu  $t$  są dane wzorami

$$v_B = \left( \frac{N_0}{M} - g \right) (t - t_1), \quad (5)$$

$$y_B = \frac{1}{2} \left( \frac{N_0}{M} - g \right) (t - t_1)^2, \quad (6)$$

gdzie  $t_1$  jest chwilą, gdy pocisk osiągnie wysokość  $l_0$ .

Na pocisk również działa siła napięcia liny oraz siła grawitacji, mają one zgodne zwroty; siła wypadkowa jest równa

$$F_{1P} = -N_0 - mg. \quad (7)$$

Prędkości  $v_P$  oraz wysokość  $y_P$  pocisku w zależności od czasu  $t$  są dane wzorami

$$v_P = v_1 - \left( \frac{N_0}{m} + g \right) (t - t_1), \quad (8)$$

$$y_P = l_0 + v_1(t - t_1) - \frac{1}{2} \left( \frac{N_0}{m} + g \right) (t - t_1)^2. \quad (9)$$

Lina będzie się rozwijała z kołowrotka, a zatem naprężenie nici będzie niezerowe do momentu gdy prędkości barona oraz pocisku się zrównają. Nastąpi to w chwili  $t_2$  spełniającej warunek  $v_B(t_2) = v_P(t_2)$ , czyli

$$\left(\frac{N_0}{M} - g\right)(t_2 - t_1) = v_1 - \left(\frac{N_0}{m} + g\right)(t_2 - t_1). \quad (10)$$

Stąd

$$t_2 - t_1 = \frac{v_1}{N_0/M + N_0/m}. \quad (11)$$

Zauważmy, że w powyższym wzorze wielkość w mianowniku odpowiada względnemu przyspieszeniu barona i pocisku, równemu  $N_0/\mu$ , gdzie  $\mu = Mm/(M + m)$  jest tzw. masą zredukowaną.

W chwili  $t_2$  baron znajduje się na wysokości  $y_{B2}$  równej

$$\begin{aligned} y_{B2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{N_0}{M} - g\right)(t_2 - t_1)^2 = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{N_0}{M} - g\right) \frac{v_1^2}{N_0^2 (1/M + 1/m)^2}, \end{aligned} \quad (12)$$

a jego prędkość wynosi

$$v_{B2} = \left(\frac{N_0}{M} - g\right) \frac{v_1}{N_0 (1/M + 1/m)}. \quad (13)$$

W tym samym momencie pocisk znajduje się na wysokości

$$\begin{aligned} y_{P2} &= l_0 + v_1(t_2 - t_1) - \frac{1}{2} \left(\frac{N_0}{m} + g\right)(t_2 - t_1)^2 = \\ &= l_0 + \frac{v_1^2}{N_0^2 (1/M + 1/m)^2} \left(N_0 (1/M + 1/m) - \frac{1}{2} \left(\frac{N_0}{m} + g\right)\right). \end{aligned} \quad (14)$$

Dla  $t > t_2$  na barona działa tylko siła grawitacji, czyli porusza się on z przyspieszeniem równym  $-g$ . Maksymalną wysokość baron osiągnie, gdy jego prędkość będzie równa 0, czyli w chwili  $t_3$  spełniającej warunek

$$t_3 - t_2 = \frac{v_{B2}}{g} = \quad (15)$$

$$= \left(\frac{N_0}{M} - g\right) \frac{v_1}{g N_0 (1/M + 1/m)}. \quad (16)$$

Ostatecznie zatem maksymalna wysokość, na jaką wzniesie się baron, jest równa

$$y_{\max} = y_{B2} + v_{B2}(t_3 - t_2) - \frac{1}{2}g(t_3 - t_2)^2 = \quad (17)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{N_0}{M} - g\right) \frac{v_1^2}{N_0^2 (1/M + 1/m)^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{N_0}{M} - g\right)^2 \frac{v_1^2}{g N_0^2 (1/M + 1/m)^2} \quad (18)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{N_0}{M} - g\right) \frac{v_1^2}{N_0^2 (1/M + 1/m)^2} \frac{N_0}{M} \quad (19)$$

$$= \frac{N_0}{2Mg} \left(\frac{N_0}{M} - g\right) \frac{v_0^2 - 2gl_0}{N_0^2 (1/M + 1/m)^2}. \quad (20)$$

przy czym jest ona osiągana tylko, jeśli są spełnione warunki  $v_0^2 > 2gl_0$  oraz  $N_0 > Mg$ ; w przeciwnym razie  $y_{\max} = 0$  m.

Dla  $m = 10$  kg,  $M = 80$  kg,  $l_0 = 5$  m,  $v_0 = 200$  m/s,  $N_0 = 8000$  N otrzymamy

$$y_{\max} = 22,6 \text{ m}, \quad (21)$$

Ciepło wydzielano w trakcie podciągania barona jest równe sile hamującej linę (czyli naprężeniu liny) pomnożonej przez wydłużenie nienawiniętej jej części, czyli

$$Q = N_0 ((y_{P2} - y_{B2}) - l_0) = \quad (22)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{v_1^2}{1/M + 1/m}. \quad (23)$$

Wydłużenie  $\Delta l$  nienawiniętej części liny można też wyznaczyć zauważając, że w chwili  $t_1$  prędkość względna pocisku i barona wynosi  $v_1$ , przyspieszenie względne jest równe  $N_0(1/M + 1/m)$  a  $t_2 - t_1$  jest dane wzorem (11). Otrzymamy

$$\begin{aligned} \Delta l &= v_1(t_2 - t_1) - \frac{N_0(1/M + 1/m)}{2}(t_2 - t_1)^2 = \\ &= \frac{v_1^2}{2N_0(1/M + 1/m)}. \end{aligned}$$

Zatem znowu

$$Q = \frac{1}{2} \frac{v_1^2}{1/M + 1/m}. \quad (24)$$

Zauważmy, że jest to energia ruchu względnego pocisku i barona w chwili  $t_1$  – ponieważ końcowa prędkość ruchu względnego jest równa 0, cała ta energia jest zamieniana na ciepło.

Dla podanych danych liczbowych otrzymujemy

$$Q = 177 \text{ kJ}. \quad (25)$$

Energia kinetyczna wystrzelonego pocisku wynosi

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = 200 \text{ kJ},$$

zatem większość z tej energii jest zamieniana na ciepło, a nie na wzniesienie barona.

## Rozwiązanie zadania 2

Prędkość zmiany powierzchni „zakreślonej” przez część pręta znajdującą się wewnątrz ramki jest równa

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}va. \quad (26)$$

Powyżej współczynnik  $1/2$  jest konsekwencją tego, że tylko górny (zgodnie z rysunkiem) punkt styczności pręta z ramką się przesuwają, a więc zakreślana w krótkim czasie powierzchnia ma kształt trójkątny. Zatem zgodnie z prawem Faradaya w pierwszym obwodzie (składającym się

z części ramki po lewej stronie pręta oraz części pręta znajdującej się wewnątrz ramki) indukuje się siła elektromotoryczna

$$\mathcal{E}_1 = -\frac{vaB}{2}, \quad (27)$$

natomiast w drugim obwodzie (składającym się z części ramki po prawej stronie pręta oraz części pręta znajdującego się wewnątrz ramki) siła elektromotoryczna

$$\mathcal{E}_2 = \frac{vaB}{2} = -\mathcal{E}_1. \quad (28)$$

Oznaczmy przez  $R_1$  opór elektryczny części ramki po lewej stronie pręta, przez  $R_2$  opór elektryczny części ramki po prawej stronie pręta, a przez  $r$  opór części pręta między punktami styku z ramką. Mamy

$$R_1 = (3a - x)\lambda, \quad (29)$$

$$R_2 = (a + x)\lambda, \quad (30)$$

$$r = \sqrt{a^2 + x^2}\lambda, \quad (31)$$

gdzie  $\sqrt{a^2 + x^2}$  jest długością części pręta między punktami styczności z ramką.

Oznaczmy przez  $I_1$  natężenie prądu płynącego w lewej części ramki (np. od wierzchołka  $S$  do wierzchołka  $R$ ), przez  $I_2$  natężenie prądu płynącego w prawej części ramki (np. od wierzchołka  $P$  do wierzchołka  $O$ ), a przez  $I$  – natężenie prądu płynącego przez pręt (od punktu styku z ramką do wierzchołka  $O$ ). Ponieważ ładunek nie gromadzi się w punktach styczności, zachodzi

$$I = I_1 - I_2. \quad (32)$$

Suma napięć na wszystkich elementach danego obwodu jest równa odpowiedniej sile elektromotorycznej, czyli

$$\mathcal{E}_1 = I_1 R_1 + I r, \quad (33)$$

$$\mathcal{E}_2 = I_2 R_2 - I r. \quad (34)$$

Uwzględniając tutaj wzory na  $I$  i  $\mathcal{E}_2$  otrzymamy

$$\mathcal{E}_1 = I_1 (R_1 + r) - I_2 r, \quad (35)$$

$$-\mathcal{E}_1 = I_2 (R_2 + r) - I_1 r. \quad (36)$$

Po rozwiązaniu powyższego układu równań otrzymamy

$$I_1 = \frac{R_2}{R_1 R_2 + (R_1 + R_2) r} \mathcal{E}_1, \quad (37)$$

$$I_2 = -\frac{R_1}{R_1 R_2 + (R_1 + R_2) r} \mathcal{E}_1. \quad (38)$$

Ostatecznie szukane natężenie prądu płynącego przez pręt wynosi

$$I = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 + (R_1 + R_2) r} \mathcal{E}_1. \quad (39)$$

W jawnej postaci mamy

$$I = -\frac{2va^2B}{\left((3a-x)(a+x) + 4a\sqrt{a^2+x^2}\right)\lambda}. \quad (40)$$

Na część pręta, przez którą płynie prąd działa siła elektrodynamiczna równa  $IBl$ , gdzie  $l = \sqrt{a^2+x^2}$  jest długością tej części. Ze względu na jednorodny rozkład tej siły wzdłuż długości pręta pochodzący od niej moment siły względem punktu  $O$  jest taki, jakby siła elektrodynamiczna była przyłożona w połowie rozważanej części pręta (co oznacza, że ramię siły wynosi  $l/2$ ). Otrzymujemy zatem wzór na moment siły

$$M = -\frac{1}{2}IBl^2. \quad (41)$$

Ponieważ prędkość kątowna obrotu pręta wynosi

$$\omega = \frac{va}{l^2}, \quad (42)$$

szukana moc jest równa

$$P = M\omega = -\frac{IBva}{2} = \quad (43)$$

$$= \frac{v^2a^3B^2}{\left((3a-x)(a+x) + 4a\sqrt{a^2+x^2}\right)\lambda}. \quad (44)$$

Zauważmy, że ponieważ nie ma dodatkowych sił oporu, a pręt jest nieważki, cała praca wykonywana na obracanie pręta jest zamieniana na ciepło generowane przez płynące w obwodzie prądy. To oznacza, że

$$P = R_1I_1^2 + R_2I_2^2 + rI^2.$$

Podstawiając wyrażenia na  $I_1$ ,  $I_2$  oraz  $I$ , a następnie na  $\mathcal{E}_1$ , otrzymamy

$$\begin{aligned} P &= R_1 \left( \frac{R_2}{R_1R_2 + (R_1 + R_2)r} \mathcal{E}_1 \right)^2 + R_2 \left( \frac{R_1}{R_1R_2 + (R_1 + R_2)r} \mathcal{E}_1 \right)^2 + \\ &\quad + r \left( \frac{R_1 + R_2}{R_1R_2 + (R_1 + R_2)r} \mathcal{E}_1 \right)^2 \\ &= \mathcal{E}_1^2 \frac{R_1 + R_2}{R_1R_2 + (R_1 + R_2)r}. \end{aligned}$$

Korzystając ze wzorów (27), (29)-(31) otrzymamy stąd wzór (44).

### Rozwiązanie zadania 3

Ponumerujmy powłoki od wewnętrznej (numer 1) do zewnętrznej (numer  $n$ ), oznaczmy temperaturę  $i$ -tej powłoki przez  $T_i$ , a temperaturę planety przez  $T_0$ . Rozważmy na początku układ

składający się z planety oraz wszystkich  $n$  powłok. Całkowita moc dostarczana do tego układu przez promieniowanie z zewnątrz (tzn. promieniowanie gwiazdy) jest równa

$$P_{\text{in}} = (1 - A) \cdot \frac{P_g}{4\pi R^2} \cdot \pi r^2 = (1 - A) \cdot P_g \frac{r^2}{4R^2}. \quad (45)$$

Powyżej  $P_g/(4\pi R^2)$  jest natężeniem (mocą na jednostkę powierzchni) promieniowania w odległości  $R$  od środka gwiazdy, natomiast  $\pi r^2$  jest prostokątnym do kierunku tego promieniowania polem powierzchni rozważanego układu. Wykorzystaliśmy tutaj fakt, że powłoki całkowicie przepuszczają promieniowanie emitowane przez gwiazdę i że planeta pochłania  $(1 - A)$  padającego na nią promieniowania gwiazdy. Całkowita moc emitowana na zewnątrz przez rozważany układ równa jest mocy wypromieniowywanej na zewnątrz przez zewnętrzną powłokę

$$P_{\text{out}} = 4\pi r^2 \sigma T_n^4. \quad (46)$$

W rozważanym bilansie nie wzięliśmy pod uwagę promieniowania planety i wewnętrznych powłok, gdyż promieniowanie to jest absorbowane przez powłoki, a więc nie wychodzi poza rozważany układ. Zauważmy również, że odbite od planety promieniowanie gwiazdy nie jest rozważane w tym bilansie, gdyż powłoki są przezroczyste dla promieniowania odbitego. Z przyrównania mocy emitowanej i absorbowanej układu planeta + powłoki otrzymujemy

$$T_n = \sqrt[4]{\frac{(1 - A) P_g}{16\pi\sigma R^2}}. \quad (47)$$

Zauważmy, że taka właśnie byłaby temperatura planety gdyby nie było powłok. Rozważmy teraz układ składający się z planety i  $k$  powłok leżących najbliżej niej, przy czym  $k < n$ . Moc wypromieniowywana przez taki układ do otoczenia jest równa mocy wypromieniowywanej na zewnątrz przez zewnętrzną powłokę, a więc

$$P_{\text{out},k} = 4\sigma\pi r^2 T_k^4. \quad (48)$$

Moc dostarczana do rozważanego układu równa jest sumie mocy promieniowania gwiazdy absorbowanego przez planetę i promieniowania emitowanego do wewnątrz przez powłokę  $k + 1$ , a więc

$$P_{\text{in},k} = 4\sigma\pi r^2 T_{k+1}^4 + (1 - A) P_g \frac{r^2}{4R^2}. \quad (49)$$

Powyższe równania są również poprawne, gdy przyjmiemy  $k = 0$  – opisują one wtedy promieniowanie emitowane i absorbowane przez samą planetę. Przyrównując  $P_{\text{out},k}$  do  $P_{\text{in},k}$ , otrzymujemy

$$T_{k+1}^4 = T_k^4 - \frac{(1 - A) P_g}{16\sigma\pi R^2}, \quad (50)$$

dla  $k = 0, 1, \dots, n - 1$ . Oznacza to, że czwarte potęgi temperatury planety i temperatur kolejnych powłok tworzą ciąg arytmetyczny, a więc

$$T_0^4 = T_n^4 + n \frac{(1 - A) P_g}{16\sigma\pi R^2}, \quad (51)$$

co po uwzględnieniu wzoru na  $T_n$  prowadzi do następującego wyrażenia na szukaną temperaturę planety

$$T_0 = \sqrt[4]{(n + 1) \frac{(1 - A) P_g}{16\sigma\pi R^2}}. \quad (52)$$

Po wstawieniu danych liczbowych otrzymujemy

$$T_0 \approx 754 \text{ K}. \quad (53)$$

Użyte w zadaniu parametry w dobrym przybliżeniu opisują Wenus. Duża wartość  $n$  spowodowana jest wyjątkowo grubą i gęstą atmosferą tej planety.