

LXXV OLIMPIADA FIZYCZNA

ZADANIA ZAWODÓW I STOPNIA

CZĘŚĆ II

Rozwiązania zadań drugiej części I stopnia należy przysyłać do właściwego ze względu na adres szkoły **Okręgowego Komitetu Olimpiady Fizycznej** w terminie do 14 listopada b.r. Zadania należy przysyłać w formie papierowej lub w formie elektronicznej poprzez platformę internetową. O kwalifikacji do zawodów II stopnia będzie decydować suma punktów uzyskanych za rozwiązania zadań części I i II.

Szczegóły dotyczące regulaminu oraz organizacji Olimpiady można znaleźć na stronie internetowej <http://www.kgof.edu.pl>.

Krótką informacją na temat poprawnej redakcji rozwiązań zadań Olimpiady Fizycznej

Zadania powinny być rozwiązane jasno, przejrzysto i czytelnie. Każde zadanie powinno być rozwiązane na oddzielnej kartce papieru. Poszczególne etapy rozumowania należy opisać, a wszelkie zależności fizyczne, które nie są wprost podane w podręcznikach szkolnych – udowodnić. Należy również objaśnić wszelkie oznaczenia występujące w rozwiązaniach zadań. Rysunki mogą być wykonane odręcznie – muszą być jednak przejrzyste i czytelne oraz dobrze opisane w tekście.

Rozumowanie przedstawione w rozwiązaniach nie może zawierać luk logicznych. Każdy krok rozumowania powinien być zwięźle opisany, a przyjęte założenia – klarownie uzasadnione. Rozwlekłość jest uznawana za ujemną cechę pracy.

Rozwiązanie zadania teoretycznego powinno być poprzedzone analizą problemu poruszanego w zadaniu, a zakończone dyskusją wyników. Rozwiązania zadań teoretycznych powinny odnosić się do ogólnej sytuacji opisanej w treści, dane liczbowe (o ile zostały podane) powinny być podstawione dopiero do ostatecznych wzorów.

W zadaniach doświadczalnych należy wyraźnie rozgraniczyć części teoretyczną i doświadczalną. Część teoretyczna zadania doświadczalnego powinna zawierać analizę problemu wraz z wyprowadzeniem niezbędnych wzorów (o ile nie ma ich wprost w podręcznikach szkolnych) oraz sugestie metody doświadczalnej. Część doświadczalna powinna zawierać m.in. opis układu doświadczalnego ilustrowany rysunkiem, opis wykonanych pomiarów, wyniki pomiarów, analizę czynników mogących wpływać na wyniki (jak np. rozpraszanie energii lub opory wewnętrzne mierników), opracowanie wyników wraz z dyskusją niepewności pomiarowych. Wykresy do zadania doświadczalnego powinny być starannie wykonane, najlepiej na papierze milimetrowym. Ocenie podlegają wyłącznie elementy rozwiązania opisane w pracy. W zadaniach doświadczalnych osobno oceniana jest część teoretyczna i część doświadczalna. Niedopuszczalne jest fabrykowanie, fałszowanie lub modyfikowanie danych pomiarowych - za tego typu działania grozi dyskwalifikacja.

W rozwiązaniach można posługiwać się dowolnym układem jednostek, chyba że tekst zadania mówi wyraźnie inaczej.

ZADANIA CZĘŚCI II (termin wysyłania rozwiązań — 14 listopada 2025 r.)

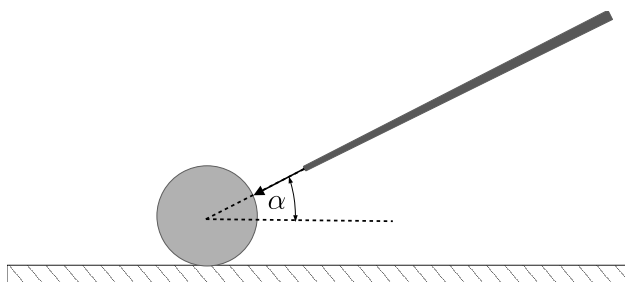
Uwaga: Rozwiązanie każdego zadania powinno być napisane na oddzielnym arkuszu papieru podaniowego. Na każdym arkuszu należy umieścić identyfikator otrzymany w trakcie rejestracji oraz nazwisko i imię autora pracy. Na pierwszym arkuszu pracy dodatkowo należy podać adres e-mail autora pracy oraz nazwę i adres szkoły. Osoby, które chcą być poinformowane listownie o wynikach kwalifikacji, do pracy powinny dołączyć zaadresowaną do siebie kopertę z naklejonym znaczkiem.

ZADANIA TEORETYCZNE

Należy przesłać rozwiązania trzech (i tylko trzech) dowolnie wybranych zadań teoretycznych. Za każde z trzech zadań można otrzymać maksimum 20 punktów.

Zadanie T1

Na płaskim, poziomym stole bilardowym spoczywa jednorodna, kulista bila. Bilardzista uderza ją kijem w taki sposób, że kij nachylony jest pod kątem $\alpha \in (0, \pi/2)$ do poziomu, a prosta będąca przedłużeniem kija przechodzi przez środek bili (patrz rysunek).



Wyznacz minimalny współczynnik tarcia statycznego μ między bilą a stołem, przy którym nie nastąpi poślizg bili.

Przyjmij, że uderzenie trwa na tyle krótko, że ciężar bili jest zanedbywalny w porównaniu z siłą, z jaką kij działa na bilę. Ponadto siła ta jest cały czas skierowana wzdłuż kija (oznacza to zatem, że tarcie kija o bilę jest pomijalnie małe). Moment bezwładności jednorodnej kuli o masie M i promieniu r względem środka masy wynosi $I = 2Mr^2/5$. Przyjmij, że w trakcie uderzenia bila nie odskakuje od stołu.

Zadanie T2

Kulisty, metalowy zbiornik o promieniu r jest wypełniony mieszaniną wody o masie m_w i temperaturze $t_1 = 0^\circ\text{C}$ z lodem o masie m_L i tej samej temperaturze. Zbiornik jest otoczony jednorodnym materiałem izolacyjnym o stałej grubości i współczynniku przewodnictwa cieplnego k , tak, że całość tworzy kulę o promieniu R . Temperatura na zewnątrz kuli, a jednocześnie na zewnętrznej powierzchni izolatora wynosi t_2 (przy czym $t_2 > t_1$) i nie zmienia się w czasie. Wyznacz czas, po jakim cały lód ulegnie roztopieniu.

Topnienie lodu przebiega tak wolno, że woda jest stale z nim w równowadze termodynamicznej. Ciepło topnienia lodu wynosi q , a ciepło właściwe wody c . Ciśnienie wody nie ulega zmianie, a zmiany objętości wody z lodem można pominąć.

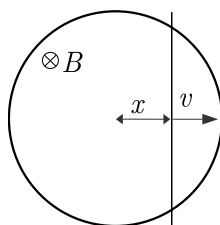
Współczynnik przewodnictwa cieplnego k jest zdefiniowany następująco:

Dla ustalonego przepływu ciepła przez ciało w kształcie prostopadłościanu o wymiarach $a \times b \times d$, przy czym $a, b \gg d$, które nie gromadzi ani nie wydziela ciepła, przewodzącego ciepło między przeciwległymi ściankami 1 oraz 2 o wymiarach $a \times b$, których temperatury wynoszą odpowiednio T_1 oraz T_2 , ilość ciepła Q przekazanego od ścianki 2 do ścianki 1 w ciągu czasu τ jest dana wzorem

$$Q = k \cdot ab \frac{T_2 - T_1}{d} \tau.$$

Zadanie T3

Wykonany z przewodnika o oporności na jednostkę długości λ , sztywny okrąg o promieniu r znajduje się w prostopadłym do jego powierzchni zewnętrznym, stałym polu magnetycznym o indukcji B . Okrąg styka się z prostoliniowym przewodnikiem (prętem) o długości $2r$. Opór elektryczny prostoliniowego przewodnika jest pomijalnie mały. Prostoliniowy przewodnik przesuwa się po okręgu ze stałą prędkością v .



Wyznacz natężenie prądu płynącego przez ten przewodnik, gdy znajduje się on w odległości x od środka okręgu. Pomiń pole magnetyczne pochodzące od prądów płynących w rozważanym obwodzie.

Zadanie T4 - numeryczne

Tenisistka uderza piłkę o masie m oraz promieniu r znajdującą się w momencie uderzenia na wysokości h_0 nad powierzchnią kortu, w odległości d od siatki. Chce ona by piłka przeleciała nad siatką i uderzyła po jak najkrótszym czasie (od momentu uderzenia) w róg kortu, w odległości a od siatki. Wysokość siatki jest stała i równa h_s , a szerokość kortu (i zarazem długość siatki) wynosi b . W momencie uderzenia piłka jest w takiej samej odległości od bocznych linii kortu. Przyjmij, że przyspieszenie grawitacyjne wynosi $g = 9,81 \text{ m/s}^2$. Siła oporu powietrza działająca na piłkę jest dana wzorem $F_R = c\pi r^2 \rho v^2/2$ i jest skierowana przeciwnie do prędkości środka piłki $\vec{v}$ względem powietrza; c oznacza stałą oporu aerodynamicznego dla kuli, ρ gęstość powietrza. Zakładamy, że powietrze jest nieruchome względem kortu. Przyjmij, że uderzenie jest natychmiastowe. Piłka się nie obraca.

Przyjmując $d = 6,0 \text{ m}$, $h_s = 1,0 \text{ m}$, $a = 12,0 \text{ m}$, $b = 11,0 \text{ m}$, $m = 58 \text{ g}$, $r = 0,0325 \text{ m}$, $\rho = 1,2 \text{ kg/m}^3$, $m = 0,058 \text{ kg}$, $c = 0,45$ dla dwóch wartości h_0

- $h_0 = 0 \text{ m}$ (tzn. tak naprawdę tuż nad powierzchnią kortu; zakładamy że nawet w takiej sytuacji tenisistka potafi odpowiednio uderzyć piłkę),
- $h_0 = h_s$,

wyznacz numerycznie ten najkrótszy czas oraz prędkość początkową piłki. W obu przypadkach zrób odpowiedni wykres toru (w płaszczyźnie tego toru), z zaznaczeniem siatki.

Uwaga:

Rozwiązanie powinno zawierać:

- (i) wzory używane w rozwiązaniu wraz z wyprowadzeniem lub uzasadnieniem;
- (ii) opis zastosowanego algorytmu;
- (iii) opis kodu programu (lub np. arkusza kalkulacyjnego) użytego do rozwiązania wraz z sposobem zagwarantowania (lub sprawdzenia) właściwej dokładności wyników;
- (iv) wykresy oraz wartości liczbowe, o których mowa w treści zadania
- (v) jakościowe omówienie otrzymanych wyników.

Nie jest dopuszczalne użycie programów do obliczeń symbolicznych lub gotowych programów wyznaczających poszukiwany czas po podaniu toru.

Dodatkowe wskazówki dotyczące rozwiązywania zadań numerycznych znajdziesz w treściach i rozwiązaniach zadań numerycznych z poprzednich olimpiad.

ZADANIA DOŚWIADCZALNE

Należy przesłać rozwiązania dwóch (i tylko dwóch) dowolnie wybranych zadań doświadczalnych. Za każde z zadań doświadczalnych można otrzymać maksymalnie 40 punktów.

Zadanie D1

Masz do dyspozycji:

- płaską, pionową, blaszaną ściankę, do której przyczepiają się magnesy (na przykład ściankę lodówki),
- płaski magnes na lodówkę, z taśmą magnetyczną o rozmiarach kilku centymetrów, np. taki jak w sklepie z pamiątkami (patrz zdjęcie),
- półlitrową butelkę z tworzywa sztucznego (np. po wodzie mineralnej),
- wodę (przyjmij gęstość wody $1,00 \text{ g/cm}^3$),
- strzykawkę o objętości 10 ml,
- typowy papier do drukarki o gramaturze 80 g/m^2 ,
- przynajmniej jednorazowy dostęp do małej elektronicznej wagi kuchennej o rozdzielczości 1-2 g,
- nożyczki,
- taśmę klejącą,
- odcinek cienkiego drutu miedzianego, o długości 20-30 cm.

Doświadczalnie sprawdź w możliwie szerokim zakresie, który z dwóch poniższych wzorów lepiej opisuje zależność siły F przyciągania magnesu od odległości x między powierzchniami ścianki i magnesu:

a) $F = F_0 e^{-kx}$,

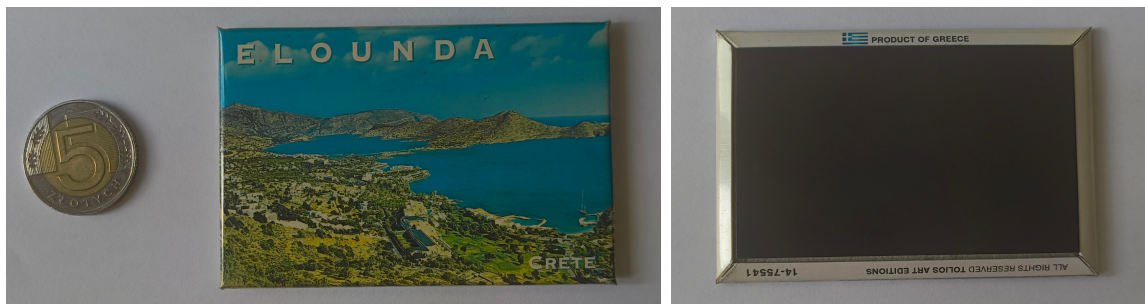
b) $F = Ax^{-k}$.

W powyższych wzorach F_0 , A oraz k są pewnymi dodatnimi stałymi. Dla wzoru, który lepiej opisuje badaną zależność, wyznacz wartość stałej k .

Uwaga 1: wybierając magnes, weź możliwie silny.

Uwaga 2: przyjmij, że kartka typowego papieru do drukarki ma grubość 0,1 mm.

Uwaga 3: załóż, że papier nie modyfikuje pola magnetycznego.



Przykładowy magnes (awers i rewers)

Zadanie D2

Masz do dyspozycji:

- pustą puszkę metalową po napoju,
- koc termoizolacyjny używany w ratownictwie, który ma jedną stronę złotą, a drugą – srebrną,
- kawałki taśmy samoprzylepnej do mocowania elementów doświadczenia,
- termometr umożliwiający odczyt temperatury z rozdzielczością $0,1\text{ }^{\circ}\text{C}$, w zakresie temperatur, w którym woda jest cieczą,
- stoper lub zegarek,
- korkową podstawkę pod gorące przedmioty lub płaski kawałek styropianu,
- dostęp do gorącej wody.

Wyznacz stosunek szybkości przepływu ciepła przez jednostkową powierzchnię koca termicznego do otaczającego powietrza zmierzonych dla dwóch ułożeń koca – stroną złotą i stroną srebrną na zewnątrz, dla temperatury koca $36,6\text{ }^{\circ}\text{C}$. Doświadczenie wykonaj w pomieszczeniu o temperaturze pokojowej. Podaj tę temperaturę w rozwiązaniu.

Zadanie D3

Przyjmij, że na małą (o promieniu z zakresu od $0,15\text{ cm}$ do $0,5\text{ cm}$) kroplę oleju poruszającą się w wodzie działa siła oporu zwrócona przeciwnie do prędkości poruszania kropli. Siła ta ma wartość zadaną wzorem

$$F = A(rv)^{\alpha},$$

gdzie r jest promieniem kropli, v prędkością poruszania się kropli, natomiast A i α to pewne dodatnie stałe.

Masz do dyspozycji:

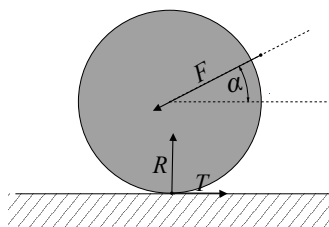
- przezroczystą butelkę z tworzywa sztucznego (np. po wodzie mineralnej),
- wodę,
- olej spożywczy (np. słonecznikowy),
- linijkę,
- strzykawkę z cienką igłą (np. o średnicy $0,5\text{ mm}$),
- smartfon z możliwością nagrywania wideo o znanej liczbie klatek na sekundę,
- statyw lub inną konstrukcję umożliwiającą nieruchome umocowanie smartfonu.

Wyznacz wykładnik α w powyższej zależności. Przyjmij, że kropla oleju poruszająca się w wodzie ma kształt kuli.

ROZWIĄZANIA

Rozwiązanie zadania T1

W trakcie uderzenia na bilę działają następujące siły: siła pochodząca od kija $\vec{F}$, siła reakcji podłoża $\vec{R}$ oraz siła tarcia podłoża o bilę $\vec{T}$. Kierunki i punkty przyłożenia tych sił przedstawiono na rysunku.



Siłę grawitacji pomijamy, gdyż, zgodnie z treścią zadania, jest ona zanedbywalnie mała w porównaniu z siłą $\vec{F}$.

Środek masy bili nie porusza się pionowo, więc z równowagi pionowych składowych sił wynika, że

$$F \sin \alpha = R \quad (1)$$

Z II zasady dynamiki, poziome przyspieszenie środka masy bili jest równe

$$a = \frac{F \cos \alpha - T}{M}, \quad (2)$$

gdzie M jest masą bili. Jediną siłą dającą niezerowy moment siły względem środka masy bili jest siła $\vec{T}$. Z II zasady dynamiki dla ruchu obrotowego, przyspieszenie kątowe bili jest równe

$$\epsilon = \frac{Tr}{I} \quad (3)$$

gdzie r jest promieniem bili, a I jej momentem bezwładności względem środka masy.

Aby bila nie ślizgała się po podłożu musi zachodzić

$$a = \epsilon r. \quad (4)$$

Równanie to, po wstawieniu zależności (2) oraz (3), przyjmuje postać

$$\frac{F \cos \alpha - T}{M} = \frac{Tr^2}{I}. \quad (5)$$

Wyrażając F przez R przy pomocy równania (1), otrzymujemy

$$R \operatorname{ctg} \alpha - T = T \cdot \frac{Mr^2}{I}, \quad (6)$$

a stąd

$$\frac{T}{R} = \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{1 + Mr^2/I} \quad (7)$$

Z drugiej strony, z definicji współczynnika tarcia, T i R spełniają warunek $T \leq \mu R$. Oznacza to, że minimalny współczynnik tarcia przy którym nie nastąpi poślizg jest równy

$$\mu = \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{1 + Mr^2/I} \quad (8)$$

Wstawiając wyrażenie na moment bezwładności kuli $I = 2Mr^2/5$ otrzymujemy

$$\mu = \frac{2}{7} \operatorname{ctg} \alpha. \quad (9)$$

Punktacja zadania T1

Związek między siłą z jaką kij działa na bilę a siłą reakcji podłoża (wzór (1) lub równoważny)	1 pkt
Związek między przyspieszeniem środka masy bili a poziomymi siłami działającymi na nią (wzór (2) lub równoważny)	2 pkt
Związek między przyspieszeniem kątowym bili a siłą tarcia (wzór (3) lub równoważny)	1 pkt
Warunek braku poślizgu (wzór (4) lub równoważny)	1 pkt
Związek między siłą reakcji podłoża a siłą tarcia (wzór (5) lub równoważny)	3 pkt
Minimalny współczynnik tarcia, przy którym nie zajdzie poślizg (wzór (9) lub równoważny)	2 pkt

Rozwiązanie zadania T2

Zauważmy, że w trakcie roztopiania lodu w zbiorniku mamy mieszaninę wody z lodem, a więc temperatura powierzchni tego zbiornika nie ulega zmianie.

Ciepło przepływające w jednostce czasu (czyli moc) przez współśrodkową ze środkiem zbiornika sferę o promieniu ρ jest równe

$$P = 4\pi\rho^2 j(\rho), \quad (10)$$

gdzie j jest strumieniem ciepła płynącego przez tę sferę (ilością ciepła na jednostkę powierzchni i jednostkę czasu). Ponieważ mamy do czynienia z ustalonym przepływem ciepła, P nie zależy od ρ . Wynika z tego, że zależność strumienia j od odległości ρ jest dana wzorem

$$j(\rho) = \frac{P}{4\pi\rho^2}. \quad (11)$$

Zgodnie z definicją współczynnika przewodnictwa oznacza to, że zmiana temperatury dT przy zmianie odległości od ρ do odległości $\rho + d\rho$, gdzie $d\rho$ jest małe, wynosi

$$dT = \frac{j(\rho)}{k} d\rho = \frac{P}{4\pi k \rho^2} d\rho. \quad (12)$$

Jest to wzór analogiczny do wzoru na małą zmianę potencjału pola elektrycznego w polu ładunku punktowego. Zatem analogicznie do przypadku elektrycznego, różnica temperatur między odległościami R oraz r wynosi

$$T(R) - T(r) = -\frac{P}{4\pi k} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right). \quad (13)$$

W naszym przypadku $T(R) - T(r) = t_2 - t_1$ co daje

$$P = \frac{4\pi k (t_2 - t_1)}{1/R - 1/r}. \quad (14)$$

Do roztopienia lodu potrzebne jest ciepło

$$Q = m_L q, \quad (15)$$

zatem całkowity czas roztopiania jest równy

$$\tau = \frac{Q}{P} = \quad (16)$$

$$= \frac{m_L q (1/R - 1/r)}{4\pi k (t_2 - t_1)}. \quad (17)$$

Punktacja zadania T2

Zauważenie stałości temperatury zbiornika w trakcie roztopiania lodu oraz stałość mocy przepływającej przez dowolną sferę wewnątrz izolatora, współśrodkową ze środkiem zbiornika 2 pkt
 Zależność strumienia ciepła od odległości od środka (wzór (11) lub równoważny) 2 pkt
 Zależność zmiany temperatury dT od odległości ρ oraz jej zmiany $d\rho$ (wzór (12) lub równoważny) 1 pkt
 Jawny wzór na przepływającą moc (wzór (14) lub równoważny) 3 pkt
 Ciepło potrzebne do roztopienia lodu (wzór (15) lub równoważny) 1 pkt
 Czas roztopiania lodu (wzór (17) lub równoważny) 1 pkt

Rozwiązanie zadania T3

Zauważmy, że prędkość zmiany powierzchni „zakreślanej” przez część pręta znajdującą się wewnątrz okręgu jest równa vl , gdzie l jest długością tej części. Zatem zgodnie z prawem Faradaya w pierwszym obwodzie (składającym się z łuku okręgu po lewej stronie pręta oraz części pręta znajdującej się wewnątrz okręgu) indukuje się siła elektromotoryczna

$$\mathcal{E} = -vBl, \quad (18)$$

przy czym

$$l = 2\sqrt{r^2 - x^2}. \quad (19)$$

Opór elektryczny pręta jest pomijalnie mały, a opór elektryczny lewego łuku okręgu jest równy

$$r\phi_1\lambda,$$

gdzie

$$\phi_1 = 2\pi - 2 \arccos(x/r),$$

Wobec tego natężenie prądu płynącego w pierwszym obwodzie jest równe

$$j_1 = -\frac{vBl}{r\phi_1\lambda}, \quad (20)$$

gdzie dodatnie j_1 oznacza prąd płynący zgodnie z ruchem wskazówek zegara.

Analogicznie natężenie prądu płynącego w drugim obwodzie (składającym się z łuku okręgu po prawej stronie pręta oraz części pręta znajdującej się wewnątrz okręgu) jest równe

$$j_2 = \frac{vBl}{r\phi_2\lambda}, \quad (21)$$

gdzie $\phi_2 = 2 \arccos(x/r)$. Dodatnie j_2 oznacza prąd płynący zgodnie z ruchem wskazówek zegara. Znak jest przeciwny niż poprzednio, gdyż ograniczona przez pręt powierzchnia ulega zmniejszaniu.

Zauważmy, że j_1 i j_2 dają przeciwny wkład do natężenia prądu płynącego przez pręt, zatem natężenie prądu płynącego przez rozważany przewodnik wynosi

$$j = j_1 - j_2 = \quad (22)$$

$$= -\frac{vB}{r\lambda} \sqrt{r^2 - x^2} \left(\frac{1}{\pi - \arccos(x/r)} + \frac{1}{\arccos(x/r)} \right). \quad (23)$$

Punktacja zadania T3

Siła elektromotoryczna w pierwszym obwodzie (wzór (18) lub równoważny) 3 pkt

Natężenie prądu płynącego w pierwszym obwodzie (wzór (20) lub równoważny) 2 pkt

Natężenie prądu płynącego w drugim obwodzie (wzór (21) lub równoważny) 3 pkt

Jawny wzór na natężenie prądu płynącego przez pręt (wzór (23) lub równoważny) .. 2 pkt

Rozwiązanie zadania T4 (numerycznego)

Zauważmy, że ponieważ piłka się nie obraca i nie wieje wiatr, zagadnienie jest praktycznie dwuwymiarowe – piłka pozostaje w płaszczyźnie pionowej wyznaczonej początkowe położenie oraz wektor prędkości początkowej piłki.

Oznaczmy przez l_0 odległość między początkowym położeniem piłki a rogami kortu, natomiast przez l_s odległość między początkowym położeniem piłki a siatką wzdłuż prostej początkowe położenie piłki – róg kortu. Z geometrii zagadnienia wynika, że

$$l_0 = \sqrt{(a+d)^2 + (b/2)^2} = 18,822 \text{ m}, \quad (24)$$

$$l_s = \frac{d}{a+d} l_0 = 6,274 \text{ m}. \quad (25)$$

gdzie wartości liczbowe odpowiadają podanym w treści zadania wartościom parametrów.

Wprowadźmy też stałą f związaną z siłą oporu powietrza, zdefiniowaną jako

$$f = \frac{c\pi r^2 \rho}{2m}. \quad (26)$$

Dla wartości parametrów podanych w treści zadania otrzymujemy $f = 0,01545 \text{ 1/m}$.

Zagadnienie można podzielić na dwa etapy:

- A.** Dla zadanego wektora prędkości początkowej piłki (czyli jego składowych: poziomej v_{x0} oraz pionowej v_{y0}), wyznaczenie toru piłki, czasu jej lotu (do chwili uderzenia w kort) T_L oraz

odległości L punktu uderzenia piłki w kort od położenia początkowego. Dla sprawdzenia czy piłka przeleciała nad siatką interesuje nas jeszcze wysokość y_s piłki nad kortem, gdy przelatuje ona nad siatką lub uderza w nią.

B. Takie dopasowanie warunków początkowych, by tor i czas lotu spełniał warunki podane w treści zadania, tzn. chcemy by dla torów spełniających warunek $L = l_0$ wartość T_L była minimalna, przy czym piłka powinna przelecieć nad siatką ($y_s \geq h_s$).

A. Wprowadźmy układ współrzędnych xy , w którym x jest poziomą składową położenia piłki, a y – pionową, mierzoną od dolnego punktu piłki. W tym układzie obowiązują równania ruchu

$$ma_x = -\frac{v_x}{v}mf v^2, \quad (27)$$

$$ma_y = -\frac{v_y}{v}mf v^2 - mg, \quad (28)$$

gdzie v_x, v_y oznaczają odpowiednie składowe prędkości piłki, a a_x, a_y – odpowiednie składowe jej przyspieszenia,

oraz zgodnie z definicją f

$$mf = \frac{c\pi r^2 \rho}{2}.$$

W części A naszym zadaniem jest rozwiązanie numeryczne powyższych równań przy warunku początkowym

$$v_x(t=0) = v_{x0}, \quad (29)$$

$$v_y(t=0) = v_{y0}, \quad (30)$$

$$x(t=0) = 0, \quad (31)$$

$$y(t=0) = h_0. \quad (32)$$

Początkowo interesują nas w tym rozwiązaniu jedynie:

- wysokość y_s piłki nad powierzchnią kortu, gdy przekracza ona linię siatki, czyli

$$y_s = y(t_s), \quad (33)$$

gdzie t_s jest takim czasem, że $x(t_s) = l_s$.

- odległość od położenia początkowego w chwili upadku piłki na kort L ,
- oraz czas T_L do momentu uderzenia piłki w kort.

Rozwiązanie numeryczne części A

Równania ruchu można przepisać w postaci różnicowej

$$\frac{\Delta v_x}{\Delta t} = -f \cdot v_x v, \quad (34)$$

$$\frac{\Delta v_y}{\Delta t} = -f \cdot v_y v - g, \quad (35)$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = v_x, \quad (36)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = v_y, \quad (37)$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}. \quad (38)$$

Dwa z powyższych równań otrzymaliśmy, dokonując zamiany $a_x \rightarrow \frac{\Delta v_x}{\Delta t}$, $a_y \rightarrow \frac{\Delta v_y}{\Delta t}$ w równaniach (27) i (28), kolejne dwa biorą się wprost z definicji prędkości. Δ odpowiada różnicy między wartością w chwili $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ oraz w chwili t_n .

Spośród bardzo wielu algorytmów pozwalających na numeryczne rozwiązanie rozważanego zagadnienia, w niniejszym rozwiązaniu wybraliśmy jeden z najprostszych: na podstawie prędkości w chwili t_n wyznaczamy prędkość w chwili $t_n + \Delta t$, a następnie wyznaczmy nowe położenie wykorzystując średnią z prędkości w chwilach t_n oraz $t_n + \Delta t$. Opisuje to następujący układ równań rekurencyjnych

$$v_n = \sqrt{(v_{x,n})^2 + (v_{y,n})^2}, \quad (39)$$

$$v_{x,n+1} = v_{x,n} - f \cdot v \cdot v_{x,n} \cdot \Delta t, \quad (40)$$

$$v_{y,n+1} = v_{y,n} - (f \cdot v \cdot v_{y,n} + g) \cdot \Delta t, \quad (41)$$

$$x_{n+1} = x_n + (v_{x,n} + v_{x,n+1}) \cdot \Delta t / 2, \quad (42)$$

$$y_{n+1} = y_n + (v_{y,n} + v_{y,n+1}) \cdot \Delta t / 2, \quad (43)$$

$$t_{n+1} = t_n + \Delta t. \quad (44)$$

Nietrudno wykazać, że dla $f = 0$, czyli dla zwykłego rzutu ukośnego bez siły oporu, powyższe równania dają ściśle rozwiązanie nawet dla dużych Δt .

Do równań (39–44) musimy dopisać równania określające początkowe wartości położenia i prędkości.

Algorytm odpowiadający powyższym równaniom nie jest najbardziej efektywny, jednak biorąc pod uwagę, że moc i dokładność obliczeń współczesnych komputerów pozwala na przyjęcie bardzo małego kroku czasowego, jest wystarczający – jak się przekonamy – do rozwiązania naszego zadania.

Musimy jeszcze dodać ustalanie wysokości piłki nad kortem dla $x = x_s$ oraz warunek zatrzymania iteracji, gdy piłka osiągnie powierzchnię kortu oraz ustalanie odległości piłki od położenia początkowego w tej chwili – opiszemy to dokładniej w następnej części. (Zauważmy, że zamiast wyznaczania odległości od początkowego położenia w chwili, gdy piłka osiągnie powierzchnię kortu, można wyznaczać wysokość piłki nad kortem, gdy $x = l_0$ lub stosować mieszane podejście.)

Opis algorytmu/programu komputerowego

Powyższe równania rekurencyjne łatwo jest przekształcić na program komputerowy, który w pętli oblicza kolejne wartości. Odpowiada on następującemu pseudokodowi:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} \quad (45)$$

$$V_{xp} = V_x, \quad V_{yp} = V_y \quad (46)$$

$$X_p = X, \quad Y_p = Y \quad (47)$$

$$V_{xn} = V_x - f \cdot V \cdot V_x \cdot dT \quad (48)$$

$$V_{yn} = V_y - (f \cdot V \cdot V_y + g) \cdot dT \quad (49)$$

$$X = X + (V_x + V_{xn}) \cdot dT/2 \quad (50)$$

$$Y = Y + (V_y + V_{yn}) \cdot dT/2 \quad (51)$$

$$T = T + dT \quad (52)$$

Wprowadziliśmy zmienne pomocnicze X_p , Y_p , V_{xp} oraz V_{yp} tymczasowo przechowujące poprzednie wartości składowych położenia i prędkości.

Powyższe polecenia należy wykonywać w pętli. Należy do nich dodać przypisanie początkowych wartości zmiennym V_x , V_y , X , Y , T , zapisywanie wartości X , Y obliczonych w danym kroku (ale jest to niezbędne tylko, jak już ustalimy składowe prędkości początkowej – aby móc narysować tor), wyznaczanie y_s , L , oraz warunek końca iteracji; możemy to zapisać np. następująco

$$\text{JEŻELI } Y < 0 \text{ TO } TL = T - Y/V_y, \quad L = X_p - Y_p/(Y - Y_p) \cdot (X - X_p), \quad \text{ZATRZYMAJ} \quad (53)$$

$$\text{JEŻELI } X > L_s \text{ ORAZ } P = -1 \text{ TO } P = 0, \quad Y_s = Y_p + (L_s - X_p)/(X - X_p) \cdot (Y - Y_p) \quad (54)$$

$$\text{JEŻELI } P = 0 \text{ ORAZ } Y_s < H_s \text{ TO } L = L_s, \quad TL = T_{\text{nies}}, \quad \text{ZATRZYMAJ} \quad (55)$$

$$\text{JEŻELI } P = 0 \text{ TO } P = 1 \quad (56)$$

Powyżej wprowadziliśmy zmienną pomocniczą P o wartościach: $P = -1$ – gdy piłka jest przed siatką (wartość początkowa), $P = 0$ – gdy piłka jest nad siatką, $P = 1$ – gdy piłka jest za siatką. T_{nies} to stała odpowiadająca formalnie nieskończonej wartości czasu. $TL = T - Y/V_y$ to interpolacyjne wyznaczenie chwili uderzenia piłki o kort, $L = X_p - Y_p/(Y - Y_p) \cdot (X - X_p)$ to interpolacyjne wyznaczenie położenia piłki w tej chwili, natomiast $Y_s = Y_p + (L_s - X_p)/(X - X_p) \cdot (Y - Y_p)$ to interpolacyjne wyznaczenie wysokości piłki, gdy przelatuje nad siatką lub uderza w nią.

W sumie niemal pełny pseudokod ma postać następującą:

$$X = 0, \quad Y = H_0, \quad V_x = V_{x0}, \quad V_y = V_{y0}, \quad T = 0, \quad P = -1 \quad (57)$$

$$\text{POWTARZAJ} \quad (58)$$

$$\text{polecenia (45-52)} \quad (59)$$

$$\text{polecenia (53-56)} \quad (60)$$

$$\text{KONIEC POWTARZANIA} \quad (61)$$

Kod w języku C++ odpowiadający powyższemu pseudokodowi jest częścią rozwiązania dostępnego na stronie KGOF. Współrzędne x oraz y położenia piłki są zapisywane do plików tekstowych (jeden plik na jeden zestaw parametrów). Aby ułatwić porównywanie wyników i ograniczyć liczbę zapisywanych danych, nie wszystkie obliczone położenia były zapisywane, a jedynie np. co 10-te lub co 100-te – w zależności od wartości kroku czasowego.

Sprawdzenie poprawności oraz dokładności wyznaczania toru oraz parametrów z nim związanych

Już na tym etapie wstępnie sprawdzono poprawność algorytmu i jego implementacji oraz dokładność obliczeń dla arbitralnie wybranych (ale realnych) wartości parametrów początkowych $v_{x0} = 20$ m/s, $v_{y0} = 20$ m/s. Dla wartości f równych 0 oraz $f = 0,01545$ 1/m oraz różnych wartości Δt wyznaczono odpowiednie wartości L , T_L oraz y_s .

Otrzymano następujące wyniki:

f , 1/m	Δt , s	L , m	T_L , s	y_s , m
0	0,1	81,5408	4,07760	5,7938
0	0,01	81,5493	4,07747	5,7997
0	0,001	81,5494	4,07747	5,7998
0,01545	0,1	42,7320	3,30355	5,7288
0,01545	0,01	43,7050	3,36085	5,7518
0,01545	0,001	43,8011	3,36670	5,7531
0,01545	0,0001	43,8107	3,36729	5,7532
0,01545	0,00001	43,8117	3,36735	5,7533

Zauważmy, że wyniki dla przypadku $f = 0$ wyniki można uzyskać ściśle i wynoszą one

$$L = 2 \frac{v_{x0} \cdot v_{y0}}{g} = 81,54944 \text{ m}, \quad (62)$$

$$T_L = 2 \frac{v_{y0}}{g} = 4,077472 \text{ s}, \quad (63)$$

$$y_s = \frac{l_s}{v_{x0}} v_{y0} - \frac{1}{2} g \left(\frac{l_s}{v_{x0}} \right)^2 = 5,79977 \text{ m}. \quad (64)$$

Na podstawie powyższych wyników wstępnie przyjęto, że krok czasowy $\Delta t = 0,001$ s jest wystarczający do uzyskania dokładności L ok. 1 cm oraz T_L około 0,001 s.

Rozwiązanie numeryczne części B

Mając wyznaczony zasięg oraz czas, musimy tak dopasować warunki początkowe (czyli składowe prędkości początkowej), by x w chwili uderzenia piłki o kort było równe l_0 (czyli by $L = l_0$) natomiast czas był jak najmniejszy. Ponieważ mamy dwa parametry, a w dodatku warunek, że piłka ma przelecieć nad siatką, nie jest to zadanie trywialne.

Zastosujemy „metodę brutalnej siły” (komputera) – będziemy zmieniać wartości parametrów aż otrzymamy najlepszą wartość.

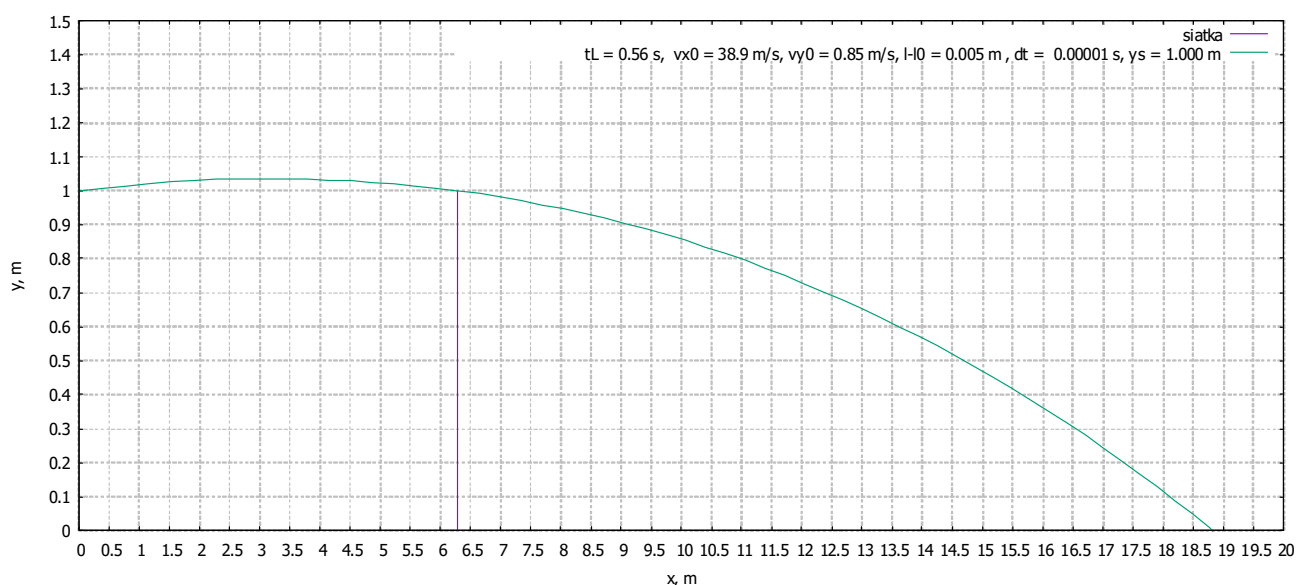
Dla przypadku $h_0 = 0$ początkowo rozważono najpierw wszystkie kombinacje v_{x0} z zakresu od 15 m/s do 40 m/s z krokiem 0,01 m/s oraz v_{y0} z zakresu od 2 m/s do 8 m/s z krokiem 0,01 m/s z ustaloną wartością $\Delta t = 0,001$ s. Z otrzymanych danych odfiltrowano te dla których $|L - l_0| > 0,05$ m lub $T_L > 10$ s, czyli te przypadki, gdy piłka nie uderza w pobliżu oczekiwanego punktu końcowego lub czas jest praktycznie nieskończony (bo piłka uderzyła w siatkę). Na podstawie otrzymanych wyników powtórzono opisaną procedurę dla v_{x0} z zakresu od 22 m/s do 23 m/s z krokiem 0,001 m/s oraz v_{y0} z zakresu od 5,0 m/s do 5,1 m/s z krokiem 0,001 m/s. Pozostawiono jedynie te dane, dla których $|L - l_0| \leq 0,01$ m oraz $T_L < 10$ s. Na tej podstawie uzyskano wyniki przedstawione w części **Wyniki oraz ich dyskusja**.

Dla przypadku $h_0 = 1$ m początkowo rozważono najpierw wszystkie kombinacje v_{x0} z zakresu od 10 m/s do 45 m/s z krokiem 0,01 m/s oraz v_{y0} z zakresu od 0 m/s do 5 m/s z krokiem 0,01 m/s z ustaloną wartością $\Delta t = 0,001$ s. Z otrzymanych danych odfiltrowano te, dla których $|L - l_0| > 0,05$ m lub $T_L > 10$ s, czyli te przypadki, gdy piłka nie uderza w pobliżu oczekiwanego punktu końcowego lub czas jest praktycznie nieskończony (bo piłka uderzyła w siatkę). Na podstawie otrzymanych wyników powtórzono opisaną procedurę dla v_{x0} z zakresu od 38 m/s do 40 m/s z krokiem 0,001 m/s oraz v_{y0} z zakresu od 0,8 m/s do 0,95 m/s z krokiem 0,001 m/s. Pozostawiono jedynie te dane, dla których $|L - l_0| \leq 0,01$ oraz $T_L < 10$ s. Na tej podstawie uzyskano wyniki przedstawione w części **Wyniki oraz ich dyskusja**.

Kod w języku C++ odpowiadający opisanym powyżej procedurom znajduje się na stronie KGOF. Wykresy wykonano przy pomocy programu Gnuplot na podstawie zapisanych do plików przez program w C++.

Wyniki oraz ich dyskusja

Dla przypadku $h_0 = 0$ otrzymano, że najkrótszy czas wynosi 0,97 s i jest osiągany dla $v_{x0} = 22,5$ m/s oraz $v_{y0} = 5,05$ m/s. Wykres toru jest przedstawiony na Rys. 1, parametry tego wykresu są podane na tym rysunku.



Rysunek 1: Tor piłki dla $h_0 = 0$ m odpowiadający najkrótszemu czasowi

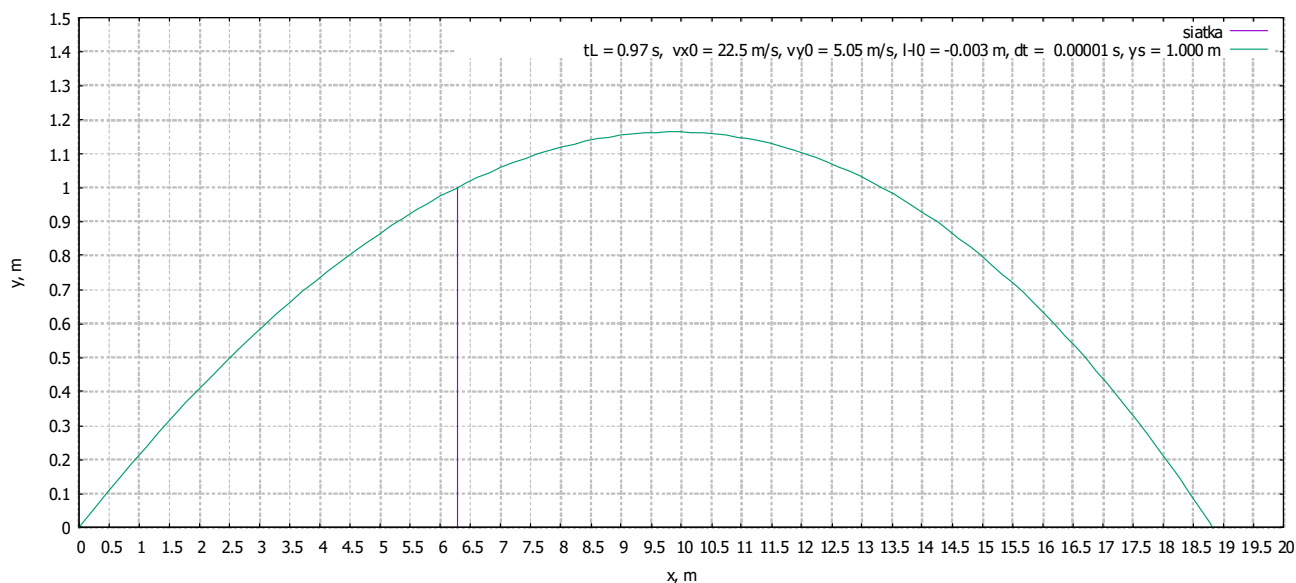
W tym przypadku najkrótszy czas jest osiągany, gdy piłka przelatuje tuż nad siatką.

Dla przypadku $h_0 = 1$ m otrzymano, że najkrótszy czas wynosi 0,56 s i jest osiągany dla $v_{x0} = 38,9$ m/s oraz $v_{y0} = 0,85$ m/s. Wykres toru jest przedstawiony na Rys. 2, parametry tego wykresu są podane na tym rysunku.

Również w tym przypadku minimalny czas jest osiągany, gdy piłka przelatuje tuż nad siatką.

Sprawdzenie poprawności oraz dokładności końcowych wyników

Dla obu rozważanych przypadków ($h_0 = 0$ m oraz $h_0 = 1$ m) ponownie sprawdzono dokładność numerycznego wyznaczania toru zmniejszając krok czasowy z $\Delta t = 0,001$ s do $\Delta t = 0,0001$ s,



Rysunek 2: Tor piłki dla $h_0 = 1$ m odpowiadający najkrótszemu czasowi

a następnie nawet do $\Delta t = 0,0001$ s; przy tych samych warunkach początkowych otrzymano, z dokładnością do trzech cyfr po przecinku, takie same wartości czasu T_L .

Ze względu na sposób otrzymania wyniku (sprawdzanie dyskretnych wartości), dokładność wyznaczonych v_{x0} oraz v_{y0} nie może być większa niż 0,001 m/s. Dodatkowo dla otrzymanych parametrów powtórzono (oprócz $\Delta t = 0,001$ s) wyznaczanie toru dla $\Delta t = 0,0001$ s i otrzymano, z dokładnością do trzech cyfr po przecinku, odpowiednio takie same wartości minimalnego czasu T_L .

Ponieważ zmiany wyznaczonego czasu minimalnego były istotne (większe od 0,01 s) dopiero przy zmianach składowych prędkości o około 0,1 m/s, przyjęto, że dokładność wyznaczenia najkrótszego czasu wynosi 0,01 s, natomiast dokładność wyznaczenia każdej ze składowych prędkości początkowej piłki jako równą 0,1 m/s

Punktacja zadania T4

- Równania ruchu (lub równoważne wyrażenie/wyrażenia) obowiązujące w rozważanym zagadnieniu (wzory (27, 28) lub równoważne) wraz z określeniem warunków początkowych (wzory (31–32) lub równoważne) 1 pkt
- Opis algorytmu wyznaczania toru, zasięgu L , czasu T_L oraz wysokości piłki nad siatką y_s oraz sposobu jego implementacji 2 pkt
- Przedstawienie wiarygodnego sposobu weryfikacji prawidłowości otrzymanego toru i liczb (np. porównanie otrzymanych L , T_L , y_s dla różnych kroków czasowych) 1 pkt
- Wiarygodny algorytm wyznaczania warunków początkowych v_{x0} , v_{y0} odpowiadających szukanemu minimalnemu czasowi 2 pkt
- Wyznaczenie w przypadku $h_0 = 0$ m, że najkrótszy czas wynosi $(0,97 \pm 0,01)$ s i jest osiąganym dla $v_{x0} = (22,5 \pm 0,3)$ m/s oraz $v_{y0} = (5,05 \pm 0,10)$ m/s wraz z określeniem dokładności wyników oraz wykres toru zgodny z wykresem w rozwiązaniu wzorcowym 2 pkt

Wyznaczenie w przypadku $h_0 = 1$ m, że najkrótszy czas wynosi $(0,56 \pm 0,01)$ s i jest osiągany dla $v_{x0} = (38,9 \pm 0,5)$ m/s oraz $v_{y0} = (0,85 \pm 0,10)$ m/s wraz z określeniem dokładności wyników oraz wykres toru zgodny z wykresem w rozwiązaniu wzorcowym

2 pkt

Uwaga:

Podane w punktach 5. oraz 6. zakresy wartości to są zakresy akceptowalnego wyniku podanego przez uczestnika; uczestnik powinien podać dokładność zgodną z jego rozważaniami. Za wyniki (punkty 5. oraz 6.) punkty nie są przyznawane nawet jeśli są poprawne, jeśli nie ma opisu sposobu otrzymania tych wyników.

Rozwiązanie zadania D1

Część teoretyczna

Z treści zadania wynika, że odległość między magnesem a metalową płaszczyzną można mierzyć, wkładając między nie kolejne kartki papieru. Zgodnie z Uwagą 3 umożliwia to zmianę odległości w krokach co 0,1 mm.

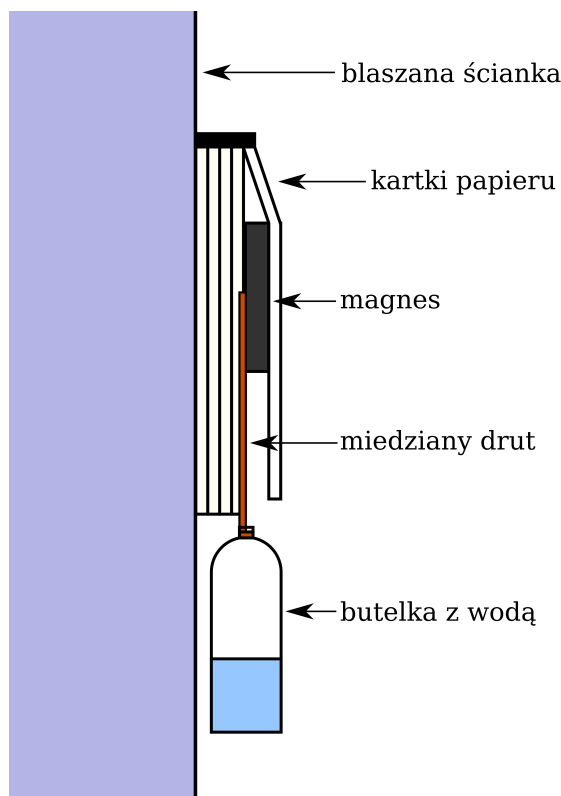
Pomiar siły przyciągania między magnesem a blachą można przeprowadzić, mierząc siłę tarcia pomiędzy dociskany papierem a powierzchnią lodówki. W praktyce, po włożeniu odpowiedniej liczby kartek papieru, magnes wraz z papierem zacznie się zsuwać pod własnym ciężarem. Oznacza to, że w tym momencie siła tarcia zrównała się z ciężarem układu (magnes + papier). Jednocześnie siła tarcia jest równa sile przyciągania magnetycznego (pełniącej tu rolę siły nacisku) pomnożonej przez współczynnik tarcia statycznego f . Znając ciężar układu, możemy więc określić siłę oddziaływania magnetycznego – z dokładnością do nieznanego współczynnika tarcia.

Naszym celem nie jest jednak wyznaczenie bezwzględnej wartości tej siły, lecz zbadanie charakteru jej zależności od odległości. Fakt, że otrzymamy wartość przeskalowaną przez współczynnik tarcia, nie stanowi zatem problemu. Przy mniejszej liczbie kartek (czyli mniejszej odległości między magnesem a blachą) spodziewamy się większej siły przyciągania. Aby doprowadzić wtedy do ześlizgnięcia, trzeba dodatkowo obciążyć układ. W tym celu wykorzystano lekką plastikową butelkę o pojemności 0,5 litra, przymocowaną drutem do pliku kartek. Korzystając ze strzykawki, można ją stopniowo napełniać wodą, zwiększając ciężar układu w kontrolowany sposób.

Pomiary wykonano w następujący sposób: za pomocą taśmy klejącej i nożyczek sporządzono plik przypominający książeczkę z kawałków kartek nieco większych niż użyty w doświadczeniu magnes (co oznacza, że jedna pocięta kartka A4 wystarcza na co najmniej kilka stron książeczki). Do grzbietu tej książeczki za pomocą drutu przyczepiamy pustą małą plastikową butelkę. Ważymy układ złożony z magnesu, książeczki i pustej butelki. Pomiary zaczynamy od minimalnej liczby kartek, przy której układ obciążający zsuwa się samoczynnie (dla użytego w teście doświadczenia układu było to 11 kartek). Następnie zmniejszamy liczbę kartek pomiędzy blachą a magnesem podwijając jedną, potem dwie i kolejne kartki (patrz rysunek 6) i dodajemy do butelki tyle wody, by znów uzyskać ześlizgnięcie. W ten sposób otrzymujemy zależność masy potrzebnej do ześlizgnięcia się od liczby kartek, czyli od odległości między magnesem a blachą. Zależność ta odzwierciedla siłę przyciągania magnetycznego (przeskalowaną współczynnikiem tarcia):

$$(m_0 + m_w)g = fF_{\text{mag}}(nd), \quad (65)$$

gdzie: m_0 – masa pustej butelki, drutu, magnesu i papieru, m_w – masa wody w butelce, n – minimalna liczba kartek, przy której układ zaczyna się zsuwać, g – przyspieszenie ziemskie, $F_{\text{mag}}(nd)$ – siła przyciągania magnetycznego dla odległości nd , d – grubość pojedynczej kartki.



Rysunek 3: Schemat układu pomiarowego.

Pomiar można przeprowadzić na dwa sposoby: albo dla ustalonej liczby kartek dobierać odpowiednie obciążenie (jak opisano wyżej), albo dla ustalonego obciążenia dobierać liczbę kartek, przy której magnes jeszcze się trzyma, ale po dodaniu jednej więcej – zsuwa się. Obie metody prowadzą do tych samych wyników.

Jeśli zależność między siłą a odległością ma charakter wykładniczy:

$$F_{\text{mag}}(x) = F_0 e^{-kx}, \quad (66)$$

to po podstawieniu do równania (65), podzieleniu przez pewne stałe F^* w celu przekształcenia równania do postaci bezwymiarowej (np. $F^* = 1$ N) i obliczeniu logarytmu obu stron równości otrzymujemy:

$$\ln \left(\frac{(m_0 + m_w)g}{F^*} \right) = -knd + \ln \left(\frac{fF_0}{F^*} \right), \quad (67)$$

czyli logarytm ciężaru układu jest liniową funkcją liczby kartek. Współczynnik kierunkowy tej prostej zależy wyłącznie od współczynnika zaniku k i grubości kartki d .

Natomiast jeśli zależność ma charakter potęgowy:

$$F_{\text{mag}}(x) = Ax^{-k}, \quad (68)$$

to po podobnym przekształceniu otrzymujemy:

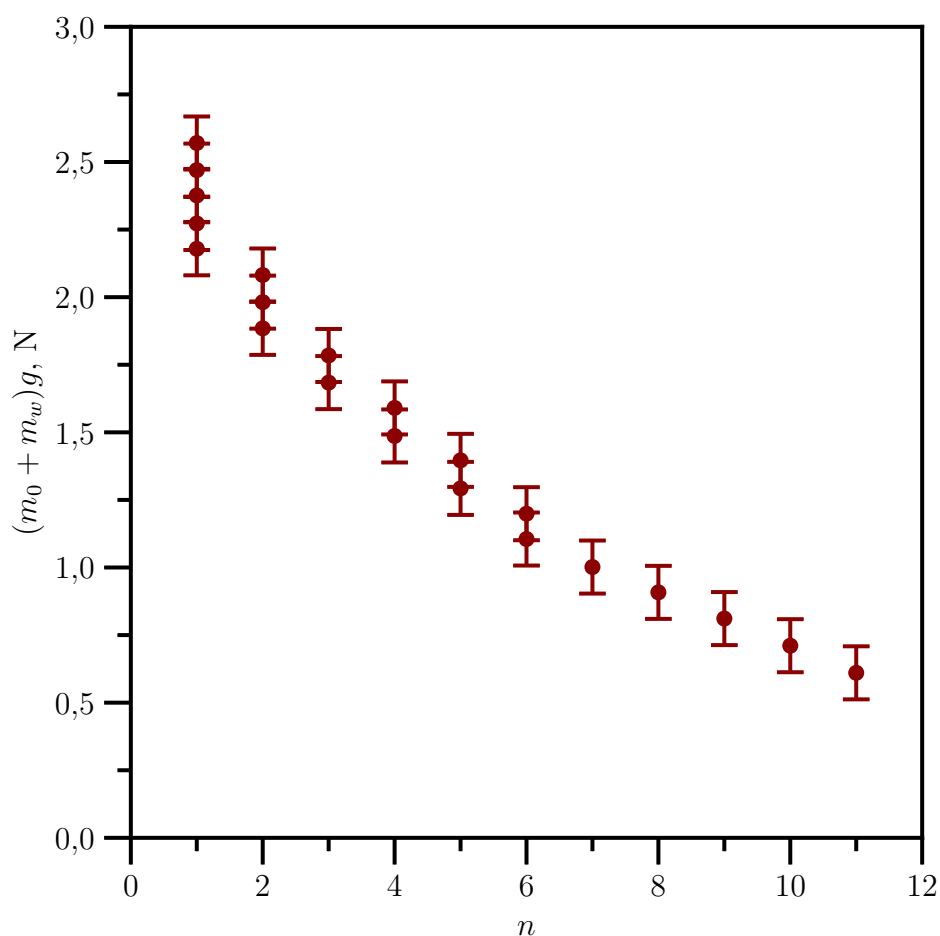
$$\ln \left(\frac{(m_0 + m_w)g}{F^*} \right) = -k \ln(n) + \ln \left(\frac{fAd^{-k}}{F^*} \right), \quad (69)$$

zatem logarytm ciężaru układu jest liniową funkcją logarytmu liczby kartek, a współczynnik kierunkowy tej zależności odpowiada (z dokładnością do znaku) poszukiwanemu wykładnikowi k .

Aby więc sprawdzić, który z powyższych modeli lepiej opisuje rzeczywistość, należy zmierzyć masę układu w momencie ześlizgu dla różnych liczby kartek, a następnie sprawdzić, czy logarytm ciężaru zależy liniowo od liczby kartek, czy też od logarytmu tej liczby.

Część doświadczalna

Pomiary wykonano zgodnie z opisanym wcześniej planem. Schemat przygotowanego układu przedstawiono na Rysunku 6.

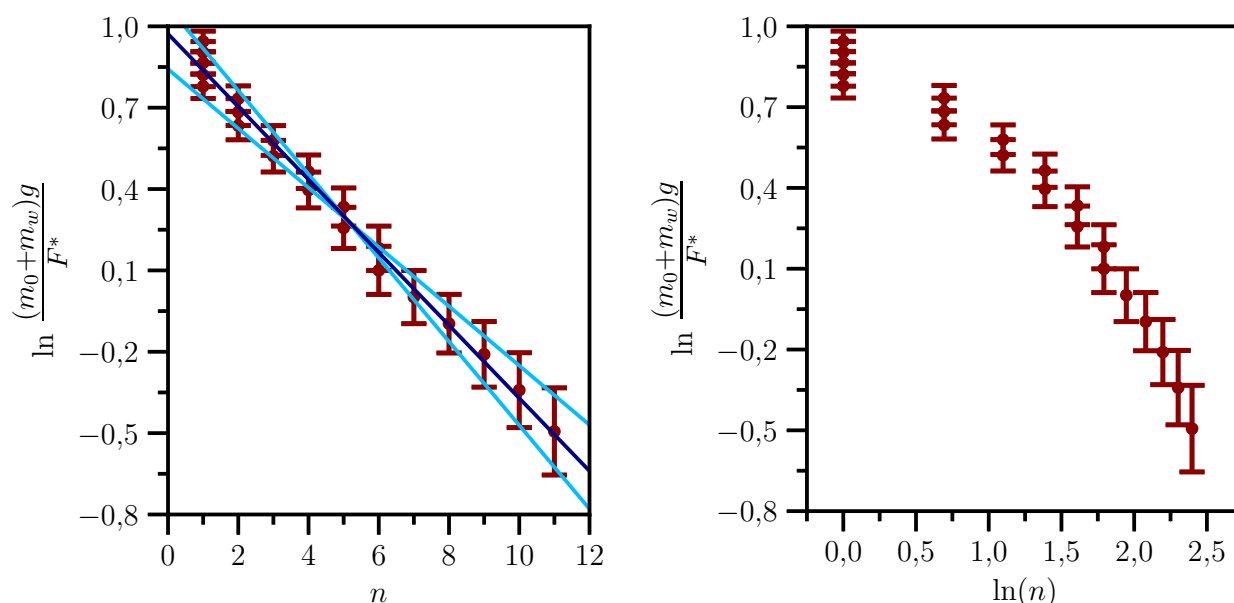


Rysunek 4: Wyniki przeprowadzonych pomiarów.

Wyniki przeprowadzonego eksperymentu przedstawiono na Rysunku 4. Za niedokładność pomiaru ciężaru przyjęto ciężar 10 ml wody.

Na podstawie uzyskanych danych obliczono logarytmy i sporządzono dwa wykresy, logarytm ciężaru układu w funkcji liczby kartek oraz logarytm ciężaru układu w funkcji logarytmu liczby kartek. Wykresy te przedstawiono na Rysunku 5.

Porównanie wykresów pokazuje, że liniowa zależność występuje wyraźnie w przypadku pierwszego wykresu, co oznacza, że siła magnetyczna zmienia się zgodnie z zależnością wykładniczą.



Rysunek 5: Wykresy przedstawiające zależność logarytmu ciężaru układu od odpowiednio liczby kartek oraz od logarytmu liczby kartek. Do pierwszej zależności dopasowano prostą oraz narysowano proste skrajne.

Współczynnik kierunkowy dopasowanej prostej wynosi $-kd = -0,135 \pm 0,004$. Ostatecznie otrzymujemy więc wartość współczynnika zaniku:

$$k = (1,35 \pm 0,04) \text{ mm}^{-1}. \quad (70)$$

Punktacja zadania D1

Pomysł na wykorzystanie siły tarcia, dla której siła magnetyczna jest siłą nacisku. . . 2 pkt.
 Rachunek sił pozwalający uzależnić odległość pomiędzy magnesem i blachą od ciężaru (wzór (65) lub równoważny). 3 pkt.
 Pomysł na sprawdzenie hipotezy o wykładniczym charakterze zależności (np. sprowadzenie wzoru do postaci liniowej ze wzoru (67) lub równoważnej). 2 pkt.
 Pomysł na sprawdzenie hipotezy o potęgowym charakterze zależności (np. sprowadzenie wzoru do postaci liniowej ze wzoru (69) lub równoważnej). 2 pkt.
 Opis układu pomiarowego oraz procedury pomiaru. 2 pkt.
 Schemat układu pomiarowego. 1 pkt
 Wskazanie poprawnego charakteru zależności wraz z uzasadnieniem. 2 pkt.
 Wyznaczenie wartości parametru k 4 pkt.
 Dyskusja i oszacowanie niepewności otrzymanych wyników. 2 pkt.

Rozwiązanie zadania D2

Część teoretyczna

Zależność między zmianą energii wewnętrznej danego ciała ΔU a zmianą jego temperatury ΔT można opisać równaniem:

$$\Delta U = mc_w \Delta T, \quad (71)$$

gdzie ΔU to zmiana energii wewnętrznej danego ciała, m – jego masa, c_w – ciepło właściwe, a ΔT – zmiana temperatury. W ogólności ciepło właściwe może zależeć od temperatury, jednak w wąskim zakresie zmian temperatury wartość ta może być uznana za stałą. Jeżeli z kolei nad ciałem nie jest wykonywana praca, zmiana jego energii wewnętrznej wynika wyłącznie z przepływu ciepła.

Oznaczmy przez Δt czas, w którym temperatura ciała zmienia się o ΔT , a energia wewnętrzna o ΔU , wówczas powyższe równanie można zapisać w postaci:

$$\frac{\Delta U}{\Delta t} = mc_w \frac{\Delta T}{\Delta t}. \quad (72)$$

Oznacza to, że dla niewielkich zmian temperatury tempo przepływu ciepła jest proporcjonalne do tempa zmiany temperatury.

Powyższą zależność można wykorzystać do wyznaczenia stosunku poszukiwanego w zadaniu. Aby przez koc przepływało ciepło, po obu jego stronach muszą znajdować się obiekty o różnych temperaturach. Z listy dostępnych przedmiotów wynika, że wymiana ciepła zachodzić będzie między metalową puszką wypełnioną gorącą wodą a otaczającym powietrzem.

Ze względu na słabe przewodnictwo cieplne powietrza, z dobrym przybliżeniem temperatura koca będzie zbliżona do temperatury powierzchni puszki, a ta z kolei będzie taka jak temperatura wody – co można potwierdzić pomiarem termometrem.

Niech $\Delta U_z/\Delta t$ oznacza szybkość przepływu ciepła przez powierzchnię koca, gdy jego złota strona jest skierowana na zewnątrz, natomiast $\Delta U_s/\Delta t$ – gdy na zewnątrz znajduje się strona srebrna. Stosunek tych dwóch wartości stanowi poszukiwany parametr.

Jeśli założymy, że zmiana energii wewnętrznej wody w puszcze wynika wyłącznie z przepływu ciepła przez koc, a masa wody pozostaje stała, to na podstawie równania (72) można zapisać:

$$\frac{\Delta U_z/\Delta t}{\Delta U_s/\Delta t} = \frac{\Delta T_z/\Delta t}{\Delta T_s/\Delta t}, \quad (73)$$

gdzie ΔT_z oznacza zmianę temperatury w przypadku, gdy złota strona koca jest skierowana na zewnątrz, natomiast ΔT_s – gdy stroną zewnętrzną jest srebrna. Dalszą analizę można przeprowadzić na dwa sposoby.

Sposób pierwszy

Dla Δt zbiegającego do 0, wyrażenie $\Delta T/\Delta t$ dąży do pochodnej funkcji temperatury względem czasu. Graficznie taka pochodna odpowiada współczynnikowi kierunkowemu stycznej do wykresu $T(t)$ w punkcie T_0 . Wyznaczenie tej zależności dla obu konfiguracji koca pozwala zatem na określenie poszukiwanego stosunku.

Sposób drugi

Zgodnie z prawem stygnięcia Newtona prawdziwa jest równość:

$$T(t) = T_0 + \Delta T(0)e^{-kt}, \quad (74)$$

gdzie $T(t)$ to temperatura wody w chwili t , T_0 to temperatura otoczenia, $\Delta T(0)$ to początkowa różnica pomiędzy temperaturą wody i temperaturą otoczenia, a k to pewna stała, która będzie jednak różna dla obu konfiguracji koca. Pochodna po czasie takiego wyrażenia będzie szybkością zmiany temperatury występującą we wzorze (73), a więc wielkością potrzebną do obliczenia szukanego stosunku

$$\frac{dT}{dt} = -k\Delta T(0)e^{-kt}. \quad (75)$$

Zwróćmy teraz uwagę, że w obu konfiguracjach poszukujemy szybkości zmiany temperatury dla takiej samej temperatury koca, a więc na mocy wzoru (74) wyrażenie $\Delta T(0)e^{-kt}$ przyjmie w tej temperaturze taką samą wartość w obu przypadkach. Stąd

$$\frac{dT_z/dt}{dT_s/dt} = \frac{k_z}{k_s}, \quad (76)$$

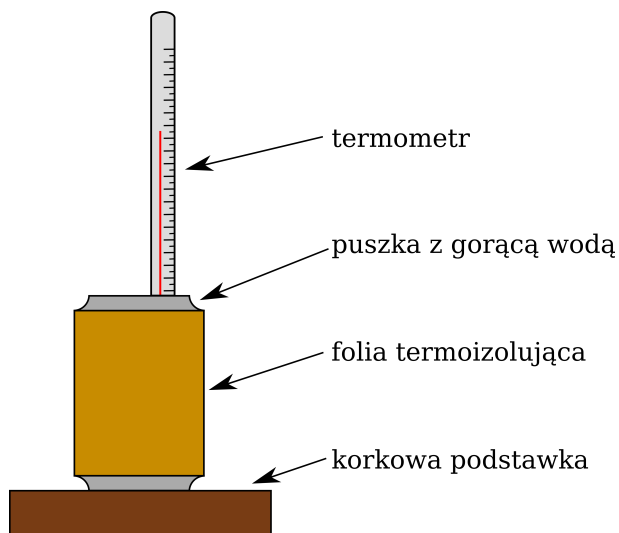
gdzie k_z i k_s to współczynniki k wyznaczone w odpowiednich konfiguracjach koca. Współczynniki te z kolei można wyznaczyć ze wzoru (74), który po przekształceniu przyjmuje postać

$$\ln \left(\frac{T(t) - T_0}{\Delta T(0)} \right) = -kt. \quad (77)$$

Mamy więc, że logarytm z różnicy temperatur jest liniową funkcją czasu, a współczynnikiem kierunkowym tej prostej jest $-k$. Dopasowując odpowiednią prostą do punktów pomiarowych można więc znaleźć parametr k w obu konfiguracjach koca, a za ich pomocą można wyznaczyć szukany w zadaniu współczynnik.

Część doświadczalna

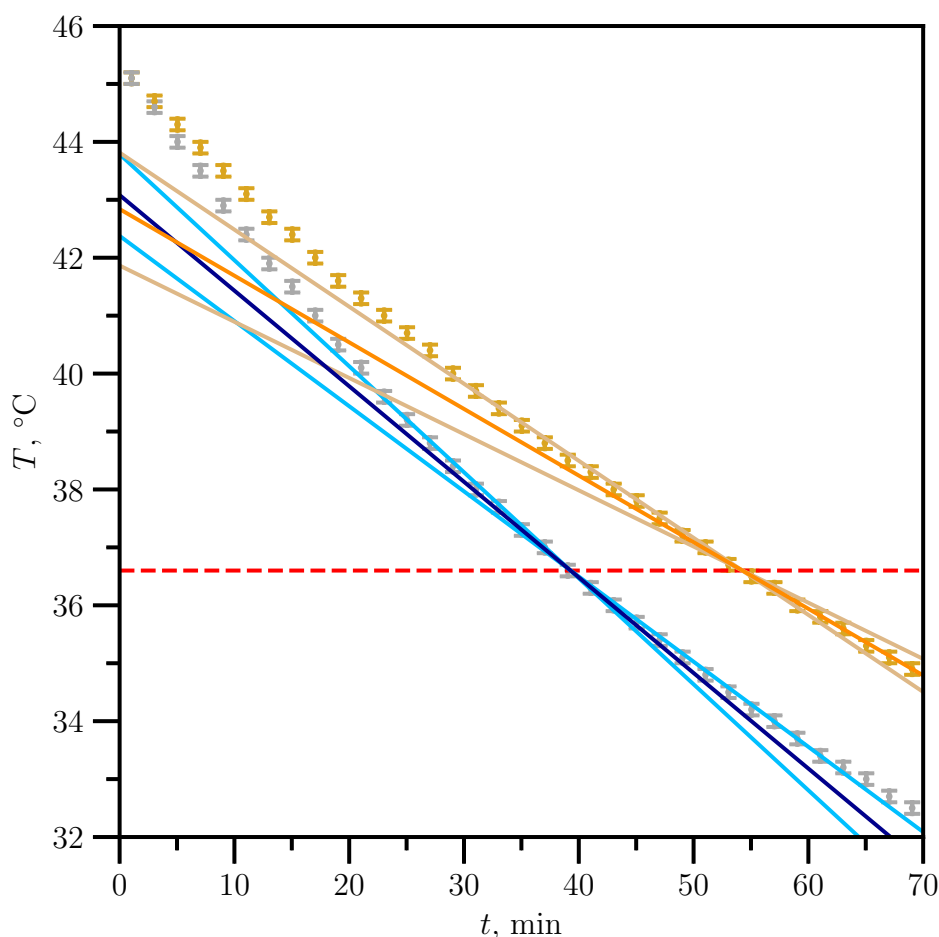
Wyznaczenie zależności temperatury puszki z wodą od czasu jest możliwe i stosunkowo proste przy użyciu dostępnych przyrządów pomiarowych: termometru oraz stopera (lub zegarka). Wystarczy wlać gorącą wodę do puszki owiniętej kocem ratunkowym, włożyć termometr, a następnie w równych odstępach czasu zapisywać odczyty temperatury.



Rysunek 6: Schemat układu pomiarowego.

Należy zwrócić szczególną uwagę na ograniczenie innych mechanizmów utraty ciepła. W szczególności puszka powinna być ustawiona na podstawce z korka lub styropianu, aby zmniejszyć odpływ ciepła do podłoża. Dodatkowo, należy jak najbardziej ograniczyć utratę ciepła przez parowanie, np. zasłaniając szczelnie otwór puszki fragmentem koca lub taśmą klejącą. Bardzo istotne dla dokładności pomiarów jest również zastosowanie tej samej ilości wody dla pomiarów wykonanych w obu konfiguracjach koca, a także umieszczenie termometru w tym samym miejscu wewnątrz puszki. Schemat układu pomiarowego przedstawiono na Rysunku 6.

Przeprowadzono dwie serie pomiarowe – po jednej dla każdej konfiguracji koca. Wyniki pomiarów przedstawiono na Rysunku 7. Obie serie zostały wykonane w pomieszczeniu o temperaturze $24\text{ }^{\circ}\text{C}$, a pomiary rozpoczęto gdy woda miała temperaturę $45,1\text{ }^{\circ}\text{C}$. Pomiar temperatury przeprowadzano co 2 minuty przez 70 minut. Wykorzystany termometr wyświetlał temperaturę z dokładnością do $0,1\text{ }^{\circ}\text{C}$, natomiast czas był mierzony z dokładnością do 1 s i te wartości zostały przyjęte za niepewność pomiarową.



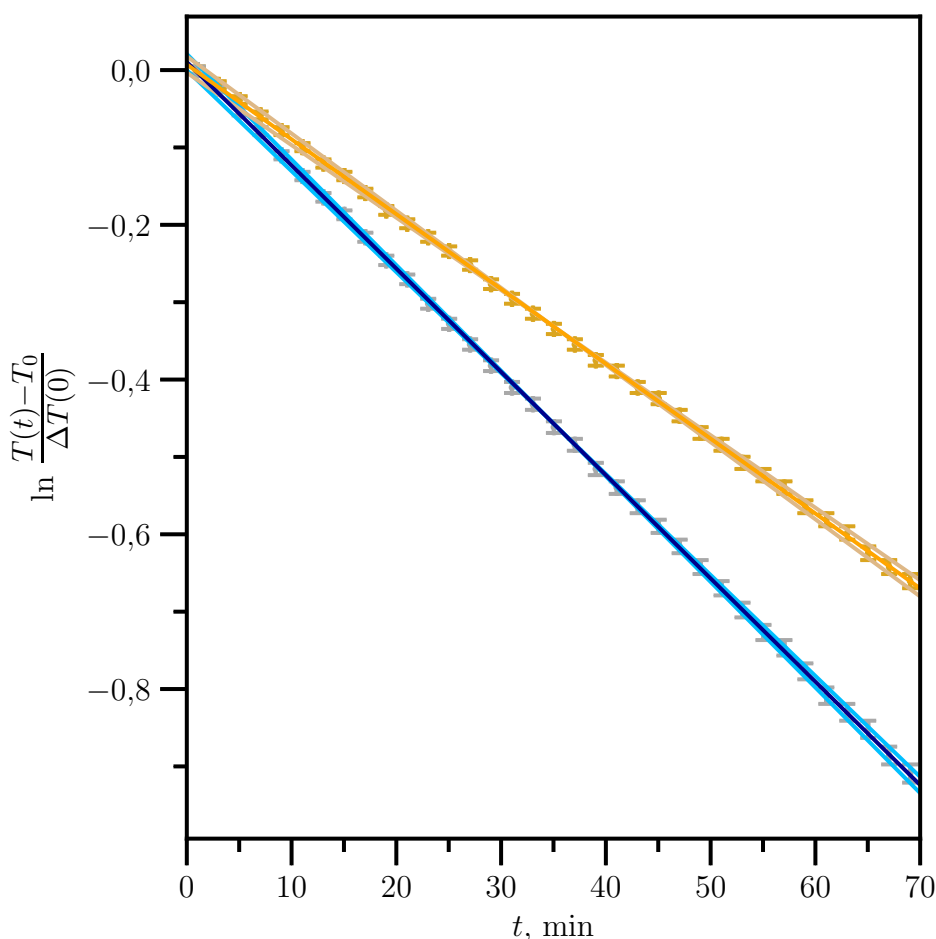
Rysunek 7: Wykres przedstawiający dane uzyskane podczas przeprowadzonych pomiarów. Na złoto zaznaczono punkty pomiarowe zebrane, gdy folia zwrócona była złotą stroną na zewnątrz, z kolei na srebrno oznaczono punkty zebrane, gdy to srebrna strona folii była na zewnątrz. Pomarańczowa prosta jest styczną wyznaczoną dla serii pomiarowej ze złotą stroną folii na zewnątrz, z kolei niebieska jest styczną poprowadzoną dla drugiej serii pomiarowej. Dla obu dopasowań poprowadzono proste skrajne. Czerwona przerywana linia wyznacza temperaturę $36,6^{\circ}\text{C}$.

Sposób pierwszy

Do obu zestawów danych pomiarowych poprowadzono styczne w punkcie odpowiadającym temperaturze $36,6\text{ }^{\circ}\text{C}$. Zrobiono to wybierając 5 punktów o temperaturze najbliższej do $36,6\text{ }^{\circ}\text{C}$ i dopasowując do nich prostą. Współczynniki kierunkowe tych prostych wynoszą odpowiednio $(-1,92 \pm 0,3) \cdot 10^{-3} \frac{^{\circ}\text{C}}{\text{s}}$ dla pomiaru z folią zwróconą złotą stroną na zewnątrz oraz $(-2,75 \pm 0,3) \cdot 10^{-3} \frac{^{\circ}\text{C}}{\text{s}}$ dla pomiaru z folią zwróconą srebrną stroną na zewnątrz. Niepewność pomiarów wyznaczona została za pomocą metody skrajnych prostych. Stosunek tych wartości, stanowiący poszukiwaną wielkość, wynosi $0,70 \pm 0,13$.

Sposób drugi

Dane otrzymane z pomiarów przekształcono zgodnie ze wzorem (77), a do otrzymanych w ten sposób punktów dopasowano proste jak na rysunku 8. Współczynniki kierunkowe dopasowanych prostych wynoszą odpowiednio $(-1,61 \pm 0,05) \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ dla pomiarów wykonanych z folią zwróconą złotą stroną na zewnątrz oraz $(-2,23 \pm 0,05) \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ w przypadku, gdy srebrna strona folii była zwrócona na zewnątrz. Stosunek tych wartości, a więc również szukany w zadaniu parametr, wynosi $0,72 \pm 0,03$.



Rysunek 8: Wykres przedstawiający dane po zlogarytmowaniu wraz z dopasowanymi prostymi i prostymi skrajnymi.

Punktacja zadania D2

- Pomysł na zamianę pomiaru ciepła na pomiar temperatury (wzór (71) lub równoważny). 2 pkt
- Rachunek wykazujący równość stosunku tempa zmiany ciepła w obu konfiguracjach do stosunku tempa zmiany temperatury w obu konfiguracjach (wzór (73) lub równoważny). 3 pkt
- Pomysł na wyznaczenie szukanej wartości na podstawie pomiaru zależności temperatury od czasu (metoda stycznej do wykresu, zastosowanie prawa Newtona lub inny, równoważny sposób). 4 pkt
- Opis układu pomiarowego oraz procedury pomiaru. 2 pkt

Schemat układu pomiarowego.	1 pkt
Zastosowanie podstawki w celu zniwelowania niedokładności pomiarowych.	1 pkt
Zakrycie otworu puszkii w celu ograniczenia parowania.	1 pkt
Wyznaczenie liczbowej wartości szukanego parametru.	4 pkt
Dyskusja i oszacowanie niepewności otrzymanych wyników.	2 pkt

Rozwiązanie zadania D3

Część teoretyczna

Celem zadania jest zbadanie siły oporu działającej na kroplę oleju w wodzie. Oprócz siły oporu działają na nią również siła wyporu oraz siła grawitacji. Wartości tych sił wynoszą odpowiednio:

$$F_w = \rho_{\text{woda}} V g, \quad (78)$$

$$F_g = \rho_{\text{olej}} V g, \quad (79)$$

gdzie ρ_{woda} i ρ_{olej} oznaczają gęstości odpowiednio wody i oleju, V to objętość kropli, a g – przyspieszenie grawitacyjne. Sumarycznie obie siły dają skierowaną ku górze siłę wypadkową o wartości:

$$F_0 = (\rho_{\text{woda}} - \rho_{\text{olej}}) V g. \quad (80)$$

Z informacji o dodatnich wartościach stałych A i α występujących we wzorze podanym w treści zadania możemy wnioskować, że siła oporu rośnie wraz ze wzrostem prędkości kropli oleju. Oznacza to, że kropla będzie przyspieszać pod wpływem siły wyporu, aż osiągnie prędkość graniczną, dla której siła oporu zrówna się z wyznaczoną wyżej siłą F_0 . Dla tej prędkości zachodzi równość:

$$(\rho_{\text{woda}} - \rho_{\text{olej}}) V g = A (rv_{\text{gr}})^\alpha. \quad (81)$$

Po przekształceniu powyższej zależności oraz podstawieniu wzoru na objętość kuli otrzymujemy:

$$v_{\text{gr}} = \left(\frac{4\pi g (\rho_{\text{woda}} - \rho_{\text{olej}})}{3A} \right)^{1/\alpha} r^{(3/\alpha)-1}. \quad (82)$$

Następnie dzielimy to równanie stronami przez pewne stałe v_0 i r_0 (np. $v_0 = 1$ cm/s oraz $r_0 = 1$ cm) w odpowiednich potęgach, aby uzyskać postać bezwymiarową:

$$\left(\frac{v_{\text{gr}}}{v_0} \right) = C \left(\frac{r}{r_0} \right)^{(3/\alpha)-1}, \quad (83)$$

gdzie C jest stałą powstałą przez podzielenie stałej występującej we wzorze (82) przez odpowiednie potęgi v_0 i r_0 . Logarytmując obie strony, otrzymujemy zależność liniową:

$$\ln \left(\frac{v_{\text{gr}}}{v_0} \right) = \left(\frac{3}{\alpha} - 1 \right) \ln \left(\frac{r}{r_0} \right) + \ln C. \quad (84)$$

Oznacza to, że po odpowiednim przekształceniu wyniki pomiarów prędkości granicznej dla kropeł różnych rozmiarów powinny układać się na prostej, której współczynnik kierunkowy pozwala wyznaczyć poszukiwany wykładnik α .

Część doświadczalna

Aby wykorzystać powyższą zależność liniową do wyznaczenia parametru α , należy opracować sposób wprowadzania do wody kropeł oleju o różnych rozmiarach. Należy przy tym zadbać, by nie wywołać znacznych ruchów wody w butelce – mogłyby one zakłócić pomiar prędkości granicznej.

Pojedynczą kroplę oleju można wprowadzić do wody za pomocą strzykawki, co pozwala uniknąć silnego wzburzenia cieczy. Aby kropla mogła osiągnąć prędkość graniczną, należy ją wstrzyknąć odpowiednio daleko od powierzchni wody. Z tego względu igłę strzykawki umieszczamy w bocznej ścianie butelki, w pobliżu jej dna. Próba wstrzyknięcia oleju zawsze skutkuje jednak niemal takim samym rozmiarem otrzymanych kropeł, gdyż oderwanie się kropli od igły następuje w momencie, gdy siła wyporu przewyższy siłę napięcia powierzchniowego utrzymującą kroplę na igle. Wielkość kropli zależy zatem tylko od rodzaju użytych cieczy oraz kształtu igły, co sprawia, że rozmiary wszystkich kropeł są zbliżone.

Jeśli jednak na igle znajduje się kropla oleju za mała do samoistnego oderwania i igła zostanie wyszarpięta z butelki, to kropla może zostać strząśnięta i oderwać się od igły. W taki sposób można otrzymać krople oleju różnych rozmiarów. Należy jednak uważać, aby przy wyszarpywaniu igły nie poruszyć butelki, ponieważ łatwo w taki sposób wzburzyć wodę w butelce, co z kolei może znacznie zaburzyć wynik pomiaru prędkości granicznej.

Pewien kłopot sprawia pomiar promienia kropli. Ze względu na jej niewielkie rozmiary i ruch, bezpośredni pomiar linijką jest praktycznie niemożliwy. Dodatkowo podziałki standardowej linijki są od siebie odległe o 1 mm, co jest odległością porównywalną z mierzoną długością, więc nawet przy pominięciu powyższych problemów bezpośredni pomiar wiązałby się z bardzo dużą niepewnością wyniku. Problem można rozwiązać, wykonując nagranie wideo, na którym widać zarówno butelkę z wodą, jak i linijkę umieszczoną w podobnej odległości od obiektywu. Analiza pojedynczej klatki takiego nagrania pozwala wyznaczyć średnicę kropli w pikselach, a obecność linijki umożliwia przeliczenie tej wartości na milimetry. Wystarczy policzyć liczbę pikseli odpowiadającą znanemu odcinkowi linijki, a następnie zastosować uzyskany współczynnik proporcjonalności. Niepewność takiego pomiaru jest znacznie mniejsza niż odległość pomiędzy podziałkami linijki i zależy głównie od liczby pikseli użytych w przeliczeniu.

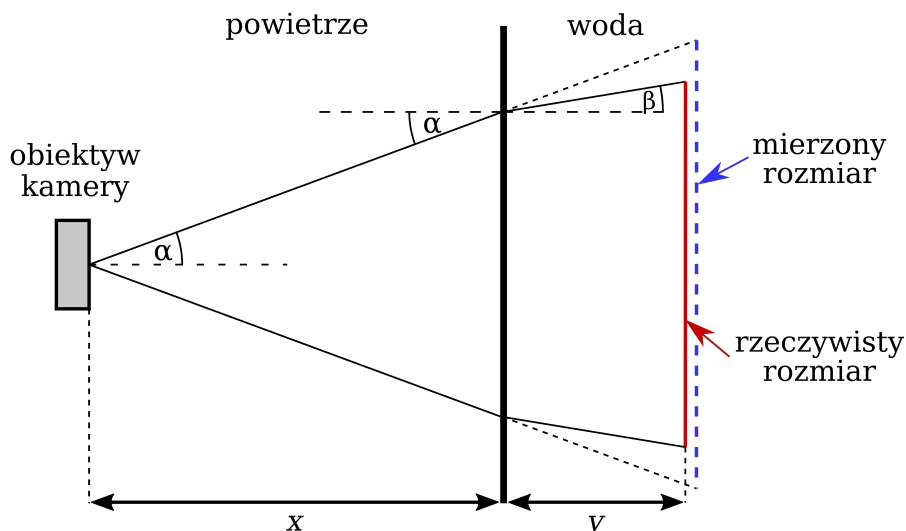
Zastosowanie standardowego obiektywu w smartfonie powoduje, że błędy związane ze zniekształceniami soczewkowymi są niewielkie. Można to sprawdzić, porównując długości w pikselach dwóch odcinków o tej samej rzeczywistej długości, lecz znajdujących się w różnych częściach kadru. Warto zwrócić jednak uwagę na jeszcze inny potencjalny problem związany z opisanym sposobem pomiaru rozmiaru kropli – zmiana wielkości obrazu kropli oleju spowodowana załamaniem światła na granicy wody i powietrza. Rozmiar obrazu kropli na matrycy kamery zależy od kąta, który tworzą promienie pochodzące od kropli i wpadające do obiektywu. Ze względu na załamanie światła kąt ten będzie nieco większy niż gdyby nagrywana kropla była zawieszona w powietrzu, patrz Rysunek 9.

Niech x oznacza odległość kamery od powierzchni butelki, y odległość kropli od powierzchni butelki, α kąt wpadania do obiektywu promienia pochodzącego z brzegu kropli, a β kąt padania tego promienia na powierzchnię butelki. Wówczas mierzony promień kropli oleju wynosi

$$r' = (x + y) \operatorname{tg} \alpha. \quad (85)$$

Rzeczywisty promień wynosi natomiast

$$r = x \operatorname{tg} \alpha + y \operatorname{tg} \beta. \quad (86)$$



Rysunek 9: Schemat wpływu załamania światła na granicy wody i powietrza na pomiar. Na czerwono zaznaczony rzeczywisty rozmiar kropli, na niebiesko rozmiar widziany w kamerze.

Wykorzystując prawo załamania światła

$$n_p \sin \alpha = n_w \sin \beta, \quad (87)$$

gdzie n_p i n_w to odpowiednio współczynniki załamania światła powietrza i wody, możemy powyższe wzory przekształcić do postaci (wykorzystując poprawne dla małych kątów przybliżenie $\sin \alpha = \tan \alpha$)

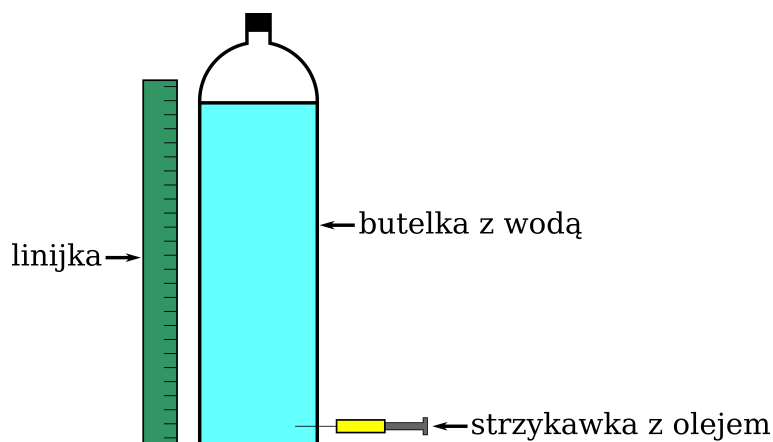
$$r = r' \left(1 - \frac{y}{x+y} \left(1 - \frac{n_p}{n_w} \right) \right). \quad (88)$$

Widzimy, że jeżeli odległości pomiędzy kamerą, ścianką butelki i kroplami oleju pozostaną stałe, załamanie światła na granicy ośrodków spowoduje zmianę rozmiaru obrazu kropli o pewien stały czynnik, który w wyznaczonej wcześniej zależności (84) nie będzie miał wpływu na współczynnik kierunkowy.

Przy okazji warto jednak wspomnieć, że rachunek ten jest prawdziwy tylko wtedy, gdy powierzchnia butelki jest płaska. W szczególności, kulista kropla oglądana przez zakrzywioną powierzchnię, np. walcowej butelki, może mieć kształt inny niż kula, tzn. jej obserwowany promień będzie różny w różnych kierunkach. W przypadku walcowej butelki można jednak zaradzić temu efektowi przez mierzenie rozmiaru kropli zawsze w kierunku zgodnym z osią butelki. W tym kierunku promienie światła załamują się dokładnie tak samo, jak w przypadku płaskiej ścianki.

Ze zniekształceniem obrazu kropli można poradzić sobie również w inny sposób. Jeżeli liniijkę umieścimy wewnątrz butelki z wodą, podziałki w obrazie kamery ulegną takiemu samemu zniekształceniu jak kropla oleju. Można taki obraz liniйки wykorzystać do wyznaczenia proporcji wykorzystanej w przeliczeniu rozmiaru kropli z pikseli na centymetry. Wyznaczony w ten sposób rozmiar kropli będzie odpowiadał ich rzeczywistym wymiarom.

Aby wyznaczyć prędkość graniczną, wykorzystuje się nagranie ruchu kropli oleju. Zmierzenie czasu, w jakim kropla przebywa pewien ustalony odcinek drogi, pozwala obliczyć prędkość graniczną. Jeżeli dla wszystkich kropli wybrany zostanie ten sam odcinek, wzór (84) można uprościć. Niech długość odcinka wynosi s , czas jego przebycia – t , a ponadto $v_0 = 1 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$, $s_0 = 1 \text{ cm}$ oraz



Rysunek 10: Schemat układu pomiarowego widzianego z perspektywy kamery.

$t_0 = 1$ s. Wówczas:

$$\ln\left(\frac{v_{gr}}{v_0}\right) = \ln\left(\frac{s}{s_0}\right) - \ln\left(\frac{t}{t_0}\right), \quad (89)$$

co po podstawieniu do (84) daje:

$$\ln\left(\frac{t}{t_0}\right) = -\left(\frac{3}{\alpha} - 1\right) \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) + \text{const.} \quad (90)$$

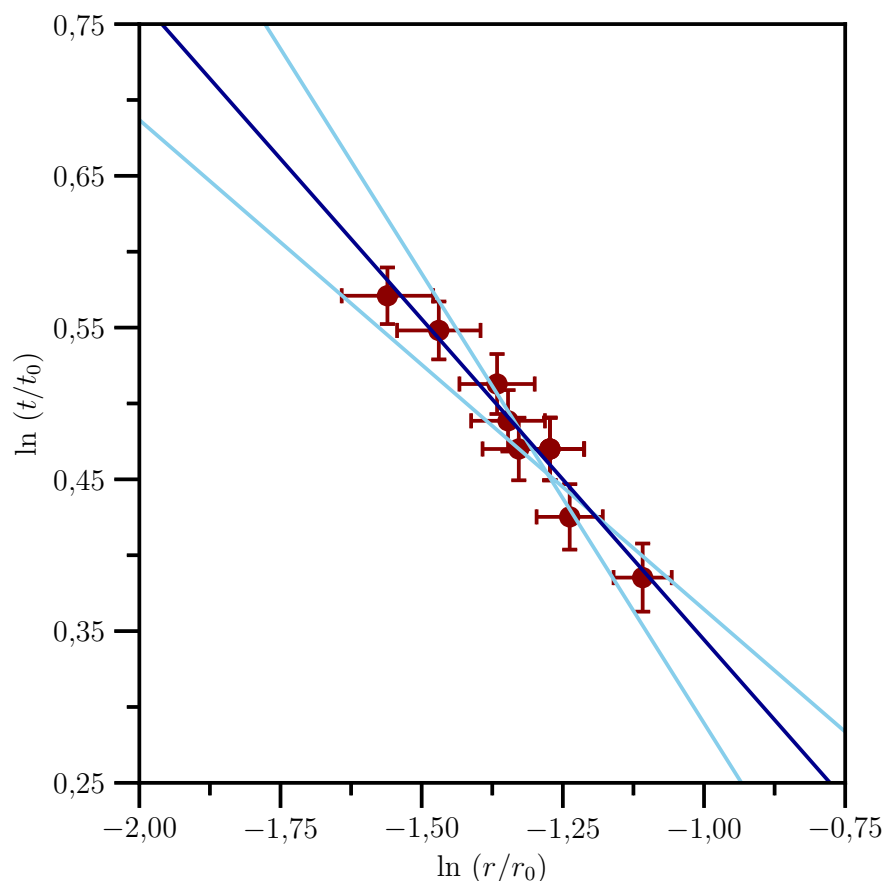
Aby upewnić się, że kropla porusza się ze stałą prędkością, dzielimy odcinek pomiarowy na dwie równe części. Jeśli czasy ich pokonania są równe, oznacza to, że kropla osiągnęła prędkość graniczną.

Podczas pojedynczego pomiaru kropla oleju zostaje wstrzyknięta do butelki, następnie strząśnięta z igły. Oderwana kropla unosi się ku górze, a jej ruch jest nagrywany. Z nagrania odczytuje się rozmiar kropli i czas przebycia ustalonego odcinka. Schemat przykładowego kadru przedstawiono na Rysunku 10.

W przykładowych pomiarach odcinkowi linijki o długości 23,0 cm odpowiadało 1317 pikseli, co oznacza, że jeden piksel odpowiadał odległości ok. 0,175 mm. Wartość ta została przyjęta jako niepewność wszystkich mierzonych długości. Czas przepływu kropli mierzono na dystansie 17 cm. Kamera smartfona rejestrowała 30 klatek na sekundę, co daje niepewność pomiaru czasu równą 1/30 s.

Z wyznaczonych wartości średnicy kropli i czasu przebycia odcinka usunięto jednostki, obliczono logarytmy, a następnie punkty pomiarowe naniesiono na wykres przedstawiony na Rysunku 11.

Do punktów pomiarowych dopasowano prostą. Współczynnik kierunkowy narysowanej prostej wynosi $-0,42 \pm 0,09$. Stąd wyznaczono wartość $\alpha = 2,11 \pm 0,13$.



Rysunek 11: Wykres z zaznaczonymi punktami pomiarowymi, dopasowaną prostą oraz prostymi skrajnymi.

Punktacja zadania D3

Wzór na siłę wypadkową działającą na nieruchomą kroplę (wzór (80) lub równoważny).

2 pkt

Wyprowadzenie zależności liniowej, w której współczynnik kierunkowy jest funkcją parametru α (wzór (84) lub równoważny). 3 pkt

Pomysł na uzyskanie kropli oleju różnych rozmiarów. 2 pkt

Pomysł na zmierzenie promienia kropli. 1 pkt

Dyskusja błędów systematycznych związanych z pomiarem rozmiaru kropli (np. uwzględnienie załamania światła na granicy ośrodków, zniekształceń wynikających z krzywizny butelki lub zakrzywień obrazu wynikających z układu obrazującego kamery).

1 pkt

Pomysł na zmierzenie prędkości granicznej (1 pkt. jeżeli nie zostało podane uzasadnienie, że wyznaczona prędkość rzeczywiście jest graniczna). 2 pkt

Opis układu pomiarowego oraz procedury pomiaru. 2 pkt

Schemat układu pomiarowego. 1 pkt

Wykonanie serii pomiarowej złożonej z pomiarów co najmniej 5 kropli różnych wielkości. 1 pkt

Wyznaczenie wartości współczynnika α 3 pkt

Dyskusja i oszacowanie niepewności otrzymanych wyników. 2 pkt