

LXXIV OLIMPIADA FIZYCZNA

ZAWODY III STOPNIA

CZEŚĆ DOŚWIADCZALNA, 12.04.2025

Za zadanie można otrzymać maksymalnie 40 punktów.

Masz do dyspozycji:

- wąski pasek przezroczystej folii o grubości $d = 0,10$ mm i szerokości $s = 7,0$ mm z pętelkami na końcach i prostopadłymi do dłuższego boku paska liniami o jednakowych szerokościach nadrukowanymi w równych odstępach;
- szerszy pasek przezroczystej folii pokryty takim układem linii jak wąski pasek;
- kartkę papieru z nadrukowanym identycznym układem linii;
- dwie butelki z wodą o masach (543 ± 5) g, jedną o masie (782 ± 5) g i jedną o masie (1565 ± 5) g;
- imadło przymocowane do stołu;
- duży gwóźdź;
- płócienną torbę z logiem Olimpiady Fizycznej;
- metalowy haczyk w kształcie litery „S”;
- linijkę;
- taśmę klejącą.

Wyznacz moduł Younga folii, z której wykonany jest wąski pasek. Przyjmij, że przyspieszenie ziemskie wynosi $g = 9,81$ m/s².

Uwaga 1: Przy dostatecznie małych naprężeniach wydłużenie kawałka materiału o przekroju poprzecznym S i długości L spowodowane działaniem siły rozciągającej F prostopadłej do przekroju poprzecznego wynosi

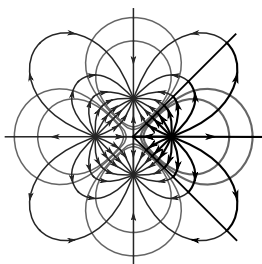
$$\Delta L = \frac{FL}{ES},$$

gdzie E oznacza moduł Younga. Moduł Younga może zależeć od kierunku rozciągania. W zadaniu należy wyznaczyć moduł Younga związany z rozciąganiem wzdłuż dłuższego boku paska.

Uwaga 2: Nie doprowadzaj do sytuacji, w której siła rozciągająca wąski pasek przekracza 35 N. Może to doprowadzić do jego trwałego odkształcenia i zmiany jego parametrów.

Uwaga 3: Nie otwieraj butelek z wodą, po skończeniu doświadczenia pozostaw je nie naruszone na stanowisku. Zabierz ze sobą torbę z logiem Olimpiady Fizycznej.

Uwaga 4: W razie uszkodzenia wąskiego paska lub pętelek na jego końcach możesz poprosić organizatorów o zastępczy wąski pasek.



LXXIV OLIMPIADA FIZYCZNA

ROZWIĄZANIA ZADAŃ ZAWODÓW III STOPNIA

CZĘŚĆ DOŚWIADCZALNA

Rozwiązanie zadania D

Część teoretyczna

Zgodnie z treścią zadania, jeśli pasek o szerokości s , grubości d i początkowej długości L będziemy rozciągać siłą F wzdłuż jego dłuższego boku, to względne wydłużenie paska wyniesie

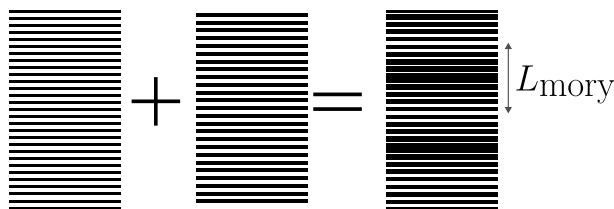
$$\epsilon = \frac{\Delta L}{L} = \frac{F}{Esd}, \quad (1)$$

gdzie E jest szukanym modułem Younga. W naszym przypadku siła rozciągająca będzie wynosić $F = F_0 + Q$, gdzie $Q = mg$ to ciężar obciążających pasek butelek z wodą o łącznej masie m , a F_0 jest nieznanym ciężarem dodatkowych elementów (haczyka i torby). Oznacza to, że ϵ zależy liniowo od Q , współczynnik kierunkowy tej zależności jest równy $1/(Esd)$.

Aby precyzyjnie zmierzyć małe wydłużenia paska, wykorzystamy nadrukowane na nim linie. Oznaczmy przez x_0 odległość między środkami sąsiednich linii nierozciągniętego paska, po rozciągnięciu odległość między środkami sąsiednich linii wyniesie

$$x = x_0(1 + \epsilon). \quad (2)$$

Po zetknięciu ze sobą powierzchni rozciągniętego i nierozciągniętego paska tak, żeby nadrukowane na obu paskach linie były równoległe, zaobserwujemy występowanie na przemian obszarów ciemnych i jasnych. Obszary ciemne występują wtedy, gdy ciemne linie jednego paska przesłaniają jasne obszary drugiego paska, przez co większa część powierzchni na którą patrzymy wydaje się ciemna. Z kolei obszary jasne odpowiadają sytuacji, gdy linie nadrukowane na obu paskach nakładają się na siebie, przez co światło przechodzące przez odstęp między tymi liniami nie jest blokowane. Powstałe w ten sposób prążki noszą nazwę *prążków mory* (lub *moiré*), patrz rys. 1.



Rysunek 1: Prążki mory przy nakładaniu się dwóch równoległych układów linii. Odstępy między środkami linii w drugim układzie są o 10% większe.

Przyjmijmy, że $\epsilon \ll 1$ i wyznaczmy odległość między sąsiednimi prążkami mory. Ponumerujmy kolejne linie występujące na obu paskach i założmy, że środek linii nr 1 na pasku nierozciągniętym pokrywa się ze środkiem linii nr 1 na pasku rozciągniętym, co odpowiada obszarowi jasnemu. Z uwagi na różnicę odległości między liniami na obu paskach, odległość między środkiem linii nr k paska rozciągniętego i linii nr k paska nierozciągniętego wyniesie $d = (k - 1)\epsilon x_0$. Kolejny

obszar jasny (po obszarze odpowiadającym linii numer 1) wystąpi, gdy środek n -tej linii paska rozciągniętego pokryje się ze środkiem linii $n + 1$ paska nierozciągniętego, co nastąpi w sytuacji gdy $d = x_0$. Oznacza to, że n spełnia równanie

$$(n - 1)x_0(1 + \epsilon) = nx_0, \quad (3)$$

stąd

$$n = \frac{1 + \epsilon}{\epsilon} \approx \frac{1}{\epsilon}, \quad (4)$$

skorzystaliśmy tu z faktu, że $\epsilon \ll 1$. W konsekwencji, odległość między dwoma sąsiednimi jasnymi prążkami mory wyniesie

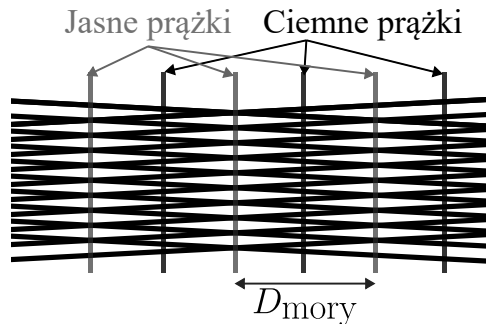
$$L_{\text{mory}} = nx_0 = \frac{x_0(1 + \epsilon)}{\epsilon} \approx \frac{x_0}{\epsilon}. \quad (5)$$

Znając x_0 i mierząc L_{mory} możemy więc wyznaczyć wydłużenie względne korzystając ze wzoru

$$\epsilon \approx \frac{x_0}{L_{\text{mory}}}. \quad (6)$$

Zauważmy, że wzór ten pozwala wyznaczyć małe ϵ bardzo precyzyjnie w sytuacji gdy x_0 jest bardzo małe, gdyż mierzona długość L_{mory} może być bardzo duża w porównaniu z x_0 .

Aby użyć opisanego wyżej efektu do pomiaru wydłużenia należy jeszcze wyznaczyć odległość między sąsiednimi liniami x_0 . Można to zrobić obserwując prążki mory powstałe po ułożeniu szerszego paska z folii na papierze z nadrukowanymi liniami w taki sposób, że linie na papierze i na folii przecinają się pod pewnym małym, niezerowym kątem α , patrz rys. 2.

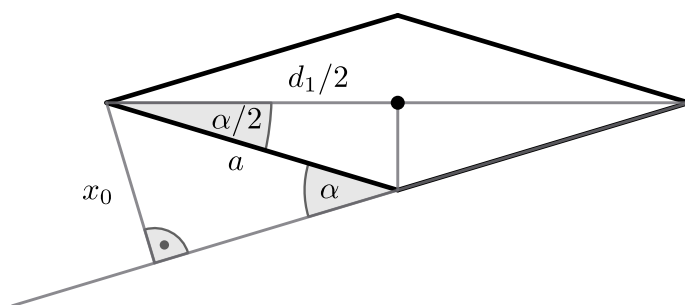


Rysunek 2: Prążki mory przy nakładaniu się jednakowych układów linii obróconych względem siebie o mały kąt α .

Przecinające się paski tworzą siatkę złożoną z identycznych rombów, przy małych wartościach α jedna z przekątnych rombu jest dużo mniejsza od drugiej. Połączone punkty przecinania się linii będą tworzyły jasne prążki mory, jest to efekt analogiczny do opisanego wcześniej: jasne prążki widzimy, gdy jasne i ciemne obszary z dwóch arkuszy nakładają się na siebie, ciemne prążki odpowiadają miejscom w których ciemne obszary przesłaniają jasne. Patrząc na rys. 2 dochodzimy do wniosku, że odległość między jasnymi prążkami mory D_{mory} będzie równa połowie długości długiej przekątnej rombu. Z rozważań geometrycznych (patrz rys. 3), długość boku rombu wynosi $a = x_0 / \sin \alpha$, a połowa długiej przekątnej rombu ma długość $d_1/2 = a \cos(\alpha/2)$, stąd

$$D_{\text{mory}} = \frac{x_0 \cos(\alpha/2)}{\sin \alpha} = \frac{x_0}{2 \sin(\alpha/2)}. \quad (7)$$

Przy małych, trudnych do bezpośredniego zmierzenia x_0 , możemy uzyskać duże, możliwe do dokładnego zmierzenia wartości D_{mory} ustalając odpowiednio małe α .

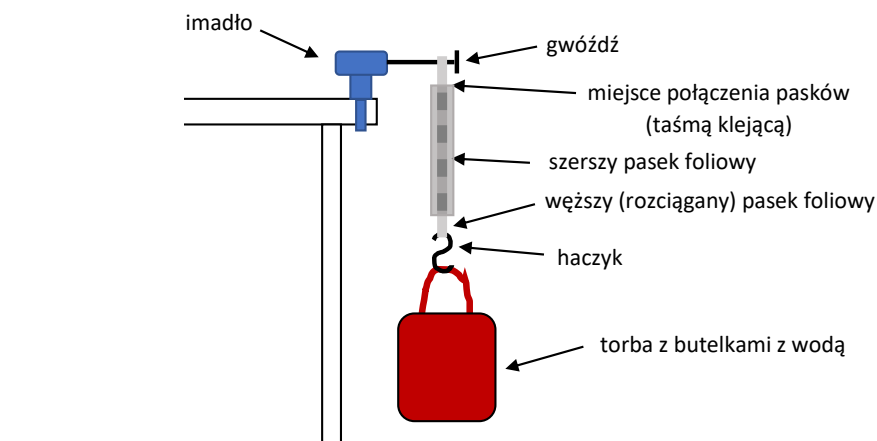


Rysunek 3: Romb ograniczony przecinającymi się pod kątem liniami.

Część doświadczalna

Pomiar modułu Younga pojęciowo nie jest trudnym zadaniem. Musimy zamocować nasz obiekt (w tym przypadku wąski pasek z tworzywa sztucznego – poliestrowej folii drukarskiej) za jeden koniec, a do drugiego końca przykładać zmienne obciążenie i mierzyć, jak pod wpływem tego obciążenia pasek się wydłuża. Ułatwieniem są pętelki na obu końcach paska – dzięki nim zarówno zamocowanie paska jak i przyłożenie obciążenia będzie bezproblemowe.

Układ do kontrolowanego rozciągania plastikowego paska możemy skonstruować z imadła, gwóźdź, haczyka i torby. Na gwóźdź nawlekamy pasek przez jedną pętelkę, a następnie chwytamy gwóźdź poziomo w imadło. Wiszący pionowo pasek obciążamy, wieszając za pomocą haczyka na jego drugim końcu torbę, do której wkładamy butelki wody (rys. 4).



Rysunek 4: Układ do pomiaru wydłużenia foliowego paska zainstalowany na brzegu stołu. Na wspólnej części pasków widoczne są prążki mory.

Zgodnie ze wzorem (1), zależność względnego wydłużenia paska ϵ od ciężaru butelek w torbie Q opisywana jest funkcją liniową o współczynniku kierunkowym $1/(Esd)$, zatem mierząc ϵ w zależności Q możemy ze współczynnika kierunkowego otrzymanej prostej wyznaczyć wartość E , jako że wymiary s i d podane są w treści zadania.

Pobieżne obserwacje wskazują jednak, że pod wpływem dopuszczonych w zadaniu obciążeń pasek rozciąga się minimalnie, tak że dokładny pomiar wydłużenia za pomocą linijki jest co najmniej problematyczny. Powinniśmy zatem znaleźć inny sposób pomiaru wydłużenia i to właśnie stanowi podstawową trudność zadania.

W celu zmierzenia dopuszczonych warunkami zadania bardzo niewielkich wydłużeń wykorzystamy fakt, że badany pasek pokryty jest nadrukowanym wzorem gęsto rozmieszczonych po-

przecznym linii oraz to, że dysponujemy dodatkowo przezroczystym obiektem (szerszy pasek) pokrytym tym samym wzorem.

Do obciążanego paska przykładamy płasko drugi pasek i mocujemy od góry taśmą klejącą tak, by oba paski były równoległe i przylegały płasko do siebie całą swoją powierzchnią. Jeśli oba paski będą nieobciążone, nadrukowane linie na obu będą miały taki sam rozstaw i powinniśmy widzieć jednolitą szarą płaszczyznę (jaśniejszą lub ciemniejszą w zależności od tego, jak ustawił się względem siebie wzór na obu paskach).

Uwaga: nierównoległe ustawienie pasków może spowodować, że zaobserwujemy wzór w postaci prostych lub wygiętych prążków, przebiegających *wzdłuż* pasków. Takiej sytuacji należy unikać i dążyć do jednorodnie szarego obrazu układając paski równoległe.

Po obciążeniu wąskiego paska obraz powinien się zmienić, gdyż, tak jak opisano to w części teoretycznej, nakładają się teraz na siebie dwa wzory poprzecznych linii, o nieco innym rozstawie (dla paska obciążonego, a więc rozciągniętego, ten rozstaw jest nieznacznie większy). W wyniku takiego nałożenia powinniśmy dostać obraz naprzemiennych obszarów ciemnych i jasnych w postaci prążków przebiegających *w poprzek* wąskiego paska. Prążki te będą występować gęściej przy większych obciążeniach, patrz wzór (5).

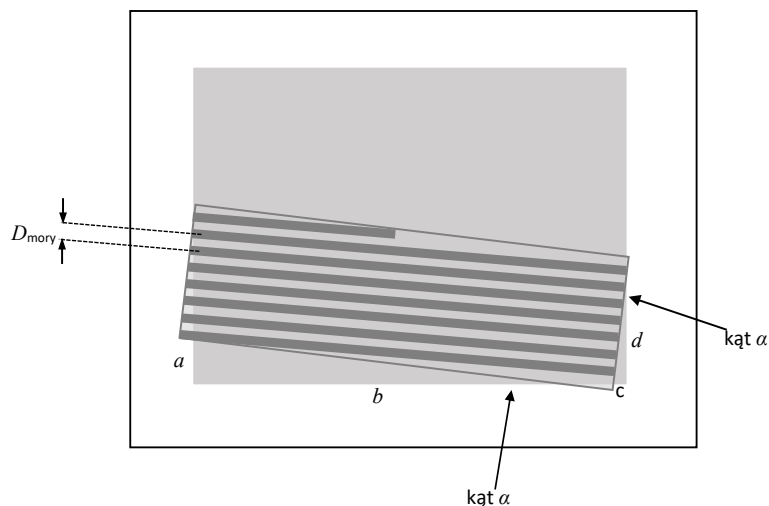
Zauważmy, że odstęp L_{mory} między sąsiednimi (ciemnymi lub jasnymi) prążkami oznacza, że na takim właśnie dystansie pasek obciążony wydłużył się o dystans x_0 . Zatem iloraz tych dwóch wielkości: x_0 i L_{mory} da nam wydłużenie względne, dokładnie tak, jak mówi wzór (6).

Obserwacja prążków mory wymaga pewnej staranności, w szczególności zadbania, by oba plastikowe paski przylegały do siebie. Można przyciskać je do siebie linijką, która zarazem posłuży nam do zmierzenia odległości między prążkami. Oczywiście, w przypadku gęściej występujących prążków warto mierzyć sumaryczny rozstaw kilku z nich. Ponieważ oko ludzkie lepiej dostrzega zmiany kontrastu na małym obszarze, „gęstsze” prążki powstające przy większych obciążeniach są łatwiejsze do zaobserwowania.

Pozostaje problem wyznaczenia odległości x_0 między nadrukowanymi liniami. Jednym z narzucających się sposobów jest policzenie ich ilości na wybranym dystansie, jednakże przygotowujący doświadczenie dołożyli starań, by bez szkła powiększającego (nieдоступnego w zadaniu) było to praktycznie niewykonalne.

Rozwiązaniem problemu jest opisane w części teoretycznej wykorzystanie prążków mory powstających przy nałożeniu na siebie pod pewnym kątem dwóch układów równoległych pasków (to właśnie te wzory, które można zaobserwować, jeśli nie ustawimy paska rozciąganego i nierozciąganego równoległe). Rozstaw tych prążków D_{mory} dany przez wzór (7) jest dla małych kątów znacznie większy od x_0 , a zatem możliwy do bezpośredniego zmierzenia linijką.

W naszym przypadku możliwe do policzenia (a więc nie za gęsto rozmieszczone) prążki powstają w zakresie kąta wzajemnego skręcenia pasków nie większego niż 10° . Do pomiaru najwygodniej jest wykorzystać szerszy pasek foliowy i kartkę z takim samym liniowym nadrukiem. Pomiar polega na skośnym ułożeniu szerszego foliowego paska na kartce z nadrukowanymi liniami i zmierzeniu rozstawu obserwowanych prążków mory. Najlepiej oczywiście zmierzyć linijką dystans zajmowany przez wiele prążków i podzielić tę odległość przez ich liczbę. Z kolei kąt pomiędzy liniami najlepiej zmierzyć rozważając trójkąt prostokątny, który tworzą brzegi obu (papierowego i foliowego) obszarów z nadrukowanymi liniami. Przy odpowiednim ustawieniu kartki i folii możemy uzyskać nawet dwa takie trójkąty (rys. 5). Iloraz łatwych do zmierzenia przyprostokątnych wyznacza tangens kąta α , pod którym krzyżują się linie, sam kąt można uzyskać z tożsamości trygonometrycznych, jednak najłatwiej jest posłużyć się kalkulatorem z funkcją \arctg .



Rysunek 5: Prążki mory powstające podczas nałożenia na siebie pod niewielkim kątem α wzorów gęstych poziomych linii ($\operatorname{tg} \alpha = a/b = c/d$).

Poniższa tabela zawiera wyniki pomiaru x_0 wykonanego dla czterech kątów.

Lp.	Krótsza przyprostokątna, mm	Dłuższa przyprostokątna, mm	α , °	D_{mory} , mm	x_0 , mm
1	6,5	140,0	2,66	4,12	0,191
2	5,5	80,0	3,93	2,76	0,189
3	11,0	100,0	6,28	1,72	0,188
4	9,5	63,0	8,58	1,28	0,192

Tabela 1: Wyniki pomiarów x_0 dla czterech różnych kątów pomiędzy liniami

Wielkość D_{mory} mierzono odpowiednio (pomiarzy 1–4) dla 30, 29, 25 i 30 kolejnych prążków, otrzymując kolejno: 123,5 mm, 80,0 mm, 43,0 mm i 38,5 mm. Wielkość x_0 wyznaczono z przekształcenia wzoru (7) jako $x_0 = 2D_{\text{mory}} \sin(\alpha/2)$. Warty zauważenia jest niewielki rozrzut wyników pozwalający na przyjęcie wartości

$$x_0 = (0,190 \pm 0,002) \text{ mm.} \quad (8)$$

Wynika on z faktu, że prawie wszystkie te długości można precyzyjnie zmierzyć linijką. Ruszając folią możemy krótszą przyprostokątną ustawić tak, by wypadała na kresce linijki, lub dokładnie w połowie działki, a to procedura dokładniejsza niż mierzenie linijką zastanej długości. Podobnie w przypadku pomiaru D_{mory} wybierano taką wielokrotność prążków, która dobrze pasowała do pełnej działki lub połowy działki linijki. Jedynie dłuższa przyprostokątna ma większą niepewność wyznaczenia (1 mm), gdyż punkt przecięcia dwóch przecinających się pod małym kątem krawędzi nie jest łatwy do wyznaczenia.

Znając x_0 możemy już zmierzyć wydłużenie względne obciążonego paska ϵ i znaleźć zależność liniową pozwalającą wyznaczyć moduł Younga. Poniższa tabela przedstawia zmierzone rozstawy prążków L_{mory} i wyliczone na ich podstawie wydłużenia względne paska w zależności od obciążenia osiągniętego różnymi kombinacjami butelek z wodą.

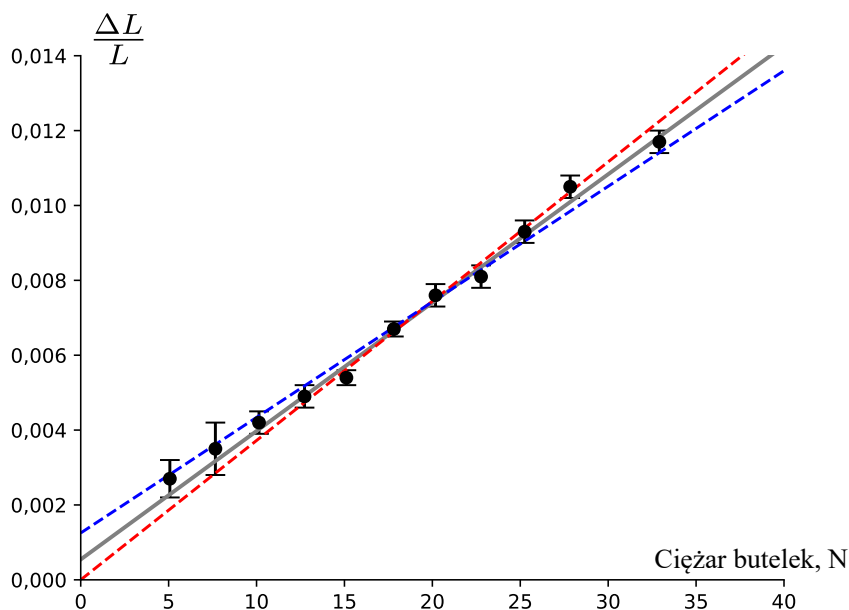
Lp.	Układ butelek	Ciężar butelek, N	Rozstaw skrajnych prążków, mm / liczba zmierzonych prążków	L_{mory} , mm	ϵ
1	M	5,07	70/1	70,0	$0,0027 \pm 0,0005$
2	Ś	7,66	55/1	55,0	$0,0035 \pm 0,0007$
3	M+M	10,14	90/2	45,0	$0,0042 \pm 0,0003$
4	M+Ś	12,73	117/3	39,0	$0,0049 \pm 0,0003$
5	D	15,11	70/2	35,0	$0,0054 \pm 0,0002$
6	M+M+Ś	17,81	85/3	28,3	$0,0067 \pm 0,0002$
7	M+D	20,18	75/3	25,0	$0,0076 \pm 0,0003$
8	Ś+D	22,77	70/3	23,3	$0,0081 \pm 0,0003$
9	M+M+D	25,25	102/5	20,4	$0,0093 \pm 0,0003$
10	M+Ś+D	27,84	127/7	18,1	$0,0105 \pm 0,0003$
11	M+M+Ś+D	32,91	130/8	16,3	$0,0117 \pm 0,0003$

Tabela 2: Wyniki pomiarów wydłużenia względnego wąskiego paska dla wszystkich możliwych do uzyskania kombinacji obciążenia; M – mała butelka (526 g), Ś – średnia butelka (781 g), D – duża butelka (1538 g). Masy te odnoszą się do butelek użytych przez przeprowadzającego doświadczenie, są one nieznacznie różne od mas butelek dostarczonych uczestnikom (patrz masy w treści zadania).

Niepewność pomiaru odległości między skrajnymi prążkami mory oszacowano na: ± 10 mm dla pomiarów 1 i 2, ± 5 mm dla pomiarów 3 i 4, ± 2 mm dla pozostałych. Znaczne różnice niepewności wynikają z faktu, że prążki pojawiające się przy małych obciążeniach są zdecydowanie mniej wyraźne niż prążki „gęstsze”. Niepewność wyznaczenia L_{mory} uzyskano dzieląc niepewność odległości między skrajnymi prążkami przez liczbę zmierzonych prążków.

Wielkość ϵ wyznaczano na podstawie wzoru (6), czyli $\epsilon = x_0/L_{\text{mory}} = 0,190 \text{ mm}/L_{\text{mory}}$, a jej niepewność wyliczono metodą najmniej korzystnego przypadku z przyjętych dla x_0 i L_{mory} niepewności.

Zależność wydłużenia względnego od ciężaru butelek przedstawiona jest na rys. 6.



Rysunek 6: Zależność wydłużenia względnego paska od ciężaru zawieszonych butelek: punkty pomiarowe z zaznaczonymi niepewnościami, wraz z dopasowaną prostą i prostymi skrajnymi.

Z wykresu tego wynika, że w całym zakresie pomiarów zależność wydłużenia od obciążenia jest liniowa. Współczynnik kierunkowy prostej dopasowanej do punktów pomiarowych (szara ciągła linia) wynosi $3,43 \cdot 10^{-4} \text{ N}^{-1}$, a współczynniki kierunkowe prostych skrajnych odpowiednio $3,09 \cdot 10^{-4} \text{ N}^{-1}$ (przerywana niebieska linia) i $3,72 \cdot 10^{-4} \text{ N}^{-1}$ (przerywana czerwona linia). Niepewność wyznaczenia współczynnika kierunkowego prostej obliczona jako połowa różnicy między współczynnikami skrajnych prostych wynosi $0,32 \cdot 10^{-4} \text{ N}^{-1}$.

Ponieważ współczynnik kierunkowy jest równy $1/(Esd)$, to po wzięciu jego odwrotności i podzieleniu przez pole przekroju poprzecznego paska sd wynoszące $0,70 \text{ mm}^2$ otrzymujemy poszukiwaną wartość modułu Younga, równą

$$E = (4,16 \pm 0,39) \text{ GPa.} \quad (9)$$

Niepewność wyniku końcowego została obliczona na podstawie współczynników kierunkowych skrajnych prostych, przy użyciu metody najmniej korzystnego przypadku. Na niepewność wyniku główny wpływ miały pomiary L_{mory} , inne niepewności (np. mas butelek wody) miały mniejsze znaczenie.

Dostępne dane podają moduł Younga dla poliestrów w zakresie 4–5,5 GPa, zatem wynik naszego pomiaru wygląda prawdopodobnie. To grupa tworzyw sztucznych o dużej sztywności. Dla porównania – zarówno polichlorek winylu jak i tworzywa poliamidowe (nylon) zawierają się w zakresie 2–3 GPa.

Punktacja zadania D

- Wyrażenie łączące zawieszoną masę, wydłużenie paska i moduł Younga (wzór (1) lub równoważny) 1 pkt.
 Pomysł na precyzyjny pomiar wydłużenia poprzez obserwację prążków mory 2 pkt.
 Wyrażenie łączące odległość między prążkami mory z wydłużeniem jednego z pasków (wzór (6) lub równoważny) 3 pkt.

Opis metody precyzyjnego pomiaru odległości x_0 między liniami wraz ze stosownym wzorem, np. (7)	4 pkt.
Zestawienie i opis układu służącego do pomiaru wydłużenia paska	1 pkt.
Wykonanie pomiarów służących do wyznaczenia wydłużenia paska przy użyciu przynajmniej sześciu różnych obciążeń	3 pkt.
Zestawienie i opis układu służącego do pomiaru odległości między liniami x_0 ; wykonanie stosownych pomiarów	2 pkt.
Wykonanie wykresu pozwalającego stwierdzić, że zależność wydłużenia paska od obciążającej go masy jest w badanym zakresie liniowa	1 pkt.
Poprawny wynik końcowy wraz z niepewnością	2 pkt.
Dyskusja najważniejszych źródeł niepewności pomiarowej	1 pkt.