

LXXIV OLIMPIADA FIZYCZNA

ZAWODY III STOPNIA

CZĘŚĆ TEORETYCZNA, 13.04.2025

Za każde zadanie można otrzymać maksymalnie 20 punktów.

Zadanie 1

Stacja kosmiczna krąży wokół pewnej kulistej planety karłowatej o masie M po eliptycznej orbicie o perycentrum r_p i apocentrum r_a . Stacja składa się z dwóch modułów: 1 (o masie m_1) oraz 2 (o masie m_2), przy czym astronauta przebywają w module 1 (ich masa jest wliczona do masy tego modułu). Załoga stacji zbuntowała się i jej celem jest wyrzut modułu 2 w taki sposób, żeby zajmowany przez nich moduł 1 oddalił się od planety poza praktyczny zasięg jej pola grawitacyjnego (formalnie – na nieskończenie dużą odległość, oczywiście w perspektywie bardzo długiego czasu). Rozłączenie modułów następuje w wyniku wybuchu znajdujących się między nimi ładunków. Energia wybuchu wynosi E_w i połowa tej energii jest zamieniana na energię kinetyczną modułów.

Wyznacz minimalną wartość energii E_w umożliwiającą wykonanie opisanego manewru. Przyjmij, że kierunek wyrzutu modułu 2 można dowolnie kontrolować, a ponadto wyrzut może nastąpić w dowolnym punkcie orbity. Czas wyrzutu modułu jest na tyle mały, że można w trakcie tego wyrzutu zaniedbać wpływ grawitacji planety, ale na tyle duży, żeby astronautom nie stała się krzywda w wyniku działania dużego przeciążenia. Należy pominąć wzajemne oddziaływanie grawitacyjne modułów i pole grawitacyjne wytwarzane przez inne ciała niebieskie. Pomiń masę ładunków wybuchowych w porównaniu z masami modułów. Ani stacja jako całość, ani moduły po rozłączeniu nie obracają się.

Podaj wynik liczbowy gdy tą planetą karłowatą jest Ceres o masie $M = 9,4 \cdot 10^{20}$ kg, natomiast $m_1 = 1,0 \cdot 10^5$ kg, $m_2 = 4,0 \cdot 10^5$ kg, $r_p = 1,0 \cdot 10^6$ m, $r_a = 5,0 \cdot 10^6$ m. Stała grawitacji wynosi $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N \cdot m²/kg².

Zadanie 2

Kierowca jechał w nocy samochodem po prostej drodze. W pewnym momencie usłyszał krótki sygnał dźwiękowy

o częstotliwości f , dochodzący z kierunku tworzącego z kierunkiem jazdy kąt α . Kierowca natychmiast wytężył wzrok i zobaczył na wprost (wzdłuż drogi) światła lokomotywy przejeżdżającej przez przejazd kolejowy. Kierowca wie, że w tej okolicy tor kolejowy jest prostopadły do drogi, pociągi jeżdżą tutaj ze stałą prędkością, a lokomotywy emitują sygnał dźwiękowy o częstotliwości f_0 . Wie też, że prędkość dźwięku w powietrzu wynosi v_d .

Kierowca natychmiast zaczął hamować, przy czym poruszał się ruchem opóźnionym ze stałym przyspieszeniem o wartości a , w wyniku czego zatrzymał się tuż przed torami.

Wyznacz odległość lokomotywy od samochodu w chwili jego zatrzymania.

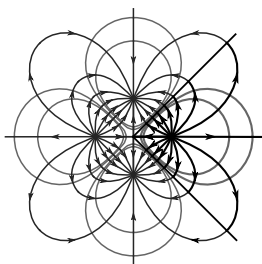
Podaj wynik liczbowy dla $\alpha = 10^\circ$, $f_0 = 400$ Hz, $f = 460$ Hz, $v_d = 340$ m/s, $a = 5$ m/s².

Pomiń liniowe rozmiary lokomotywy oraz samochodu. Dzień był bezwietrzny, a okolica płaska.

Zadanie 3

Bardzo długa (tzn. o długości znacznie większej od promienia), jednorodna, sztywna, pusta w środku rura o cienkich ścianach i promieniu R leży na poziomym podłożu. Rura jest przecięta poziomą płaszczyzną równoległą do płaszczyzny podłoża, znajdującą się w takiej odległości od niego, że powierzchnia górnej części rury stanowi ułamek x całej powierzchni rury. Przez górną część rury, wzdłuż jej osi, płynie jednorodny prąd o całkowitym natężeniu I , a przez dolną – jednorodny prąd o całkowitym natężeniu $-I$. Masa rury na jednostkę długości wynosi λ . Wyznacz minimalne natężenie prądu I_{\min} , powyżej którego górna część rury uniesie się nad dolną.

Pomiń siły związane z przewodami podłączeniowymi. Przyspieszenie ziemskie wynosi g , natomiast przenikalność magnetyczna próżni jest równa μ_0 .



LXXIV OLIMPIADA FIZYCZNA

ROZWIĄZANIA ZADAŃ ZAWODÓW III STOPNIA

CZĘŚĆ TEORETYCZNA

Rozwiązanie zadania 1

Rozważmy układ, w którym stacja spoczywa. Po wybuchu prędkości modułów v_1 i v_2 mają przeciwne zwroty i zgodnie z zasadą zachowania pędu

$$m_1 v_1 = m_2 v_2. \quad (1)$$

Ponadto, z przyrównania połowy energii wybuchu do sumy energii kinetycznych modułów otrzymujemy

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{E_w}{2}. \quad (2)$$

Wynika stąd, że wartość prędkości uzyskanej przez moduł 1 w tym układzie wynosi

$$v_1 = \sqrt{\frac{E_w m_2}{m_1(m_1 + m_2)}}. \quad (3)$$

W układzie związanym z okrążaną planetą stacja miała tuż przed wyrzutem pewną prędkość \vec{V} . Prędkość modułu 1 tuż po wybuchu w układzie planety wynosi

$$\vec{V}_1 = \vec{V} + \vec{v}_1. \quad (4)$$

Zgodnie z uwagą o czasie rozłączenia modułów, wpływ siły grawitacji na uzyskane przez nie prędkości pomijamy. Aby ucieczka modułu 1 była możliwa, jego całkowita energia mechaniczna (będąca sumą energii potencjalnej grawitacji i kinetycznej) musi być nieujemna. Zauważmy, że całkowita początkowa energia tego modułu (przed wybuchem) jest taka sama w każdym punkcie orbity. Zmianę całkowitej energii modułu 1 w wyniku wybuchu można obliczyć jako zmianę jego energii kinetycznej:

$$\Delta E = \frac{m_1}{2} (V_1^2 - V^2) = \frac{m_1}{2} (2\vec{V} \cdot \vec{v}_1 + v_1^2). \quad (5)$$

Powyżej skorzystaliśmy z tego, że kwadrat długości wektora jest równy iloczynowi skalarnemu tego wektora ze sobą: $V_1^2 = \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_1 = (\vec{V} + \vec{v}_1) \cdot (\vec{V} + \vec{v}_1)$.

Ucieczka powiedzie się przy minimalnej możliwej energii wybuchu E_w , gdy powyższy przyrost będzie zmaksymalizowany dla ustalonej wartości v_1 . Aby to osiągnąć, należy zmaksymalizować iloczyn skalarny $\vec{V} \cdot \vec{v}_1$. Oznacza to, że wybuch powinien nastąpić, gdy prędkość stacji jest największa, a więc gdy znajduje się ona w perycentrum. Ponadto, kierunek wyrzutu modułu 2 powinien być przeciwny do wektora prędkości stacji.

Niech V_a oraz V_p będą prędkościami stacji odpowiednio w apocentrum oraz perycentrum. Z zasady zachowania momentu pędu (lub z II prawa Keplera) wynika, że

$$V_a r_a = V_p r_p. \quad (6)$$

Powyżej skorzystaliśmy z tego, że w perycentrum oraz w apocentrum prędkość stacji jest prostopadła do wektora wodzącego. Z zasady zachowania energii otrzymujemy

$$\frac{V_a^2}{2} - \frac{GM}{r_a} = \frac{V_p^2}{2} - \frac{GM}{r_p}. \quad (7)$$

Z powyższych równań można wyznaczyć V_p

$$V_p = \sqrt{\frac{2GM r_a}{r_p(r_a + r_p)}}. \quad (8)$$

Jak już stwierdziliśmy, ucieczka powiedzie się, gdy całkowita energia mechaniczna modułu będzie nieujemna, tzn. przy rozważaniu perycentrum, gdy

$$\frac{1}{2}V_1^2 - \frac{GM}{r_p} \geq 0. \quad (9)$$

Oznacza to, że prędkość modułu 1 tuż po wybuchu w perycentrum powinna spełniać warunek

$$V_1 \geq \sqrt{\frac{2GM}{r_p}}. \quad (10)$$

Z drugiej strony wartość tej prędkości wynosi

$$V_1 = V_p + v_1, \quad (11)$$

gdyż wyrzut modułu 2 nastąpił w kierunku przeciwnym do prędkości stacji. Wstawiając wyrażenia (3) oraz (8) do równania (11), a następnie do nierówności (10), otrzymujemy po kilku przekształceniach

$$E_w \geq \frac{2GMm_1(m_1 + m_2)}{m_2r_p} \left(1 - \sqrt{\frac{r_a}{r_a + r_p}}\right)^2. \quad (12)$$

Wstawiając wartości liczbowe otrzymujemy

$$E_w \geq 119,0 \text{ MJ}. \quad (13)$$

Punktacja zadania 1.

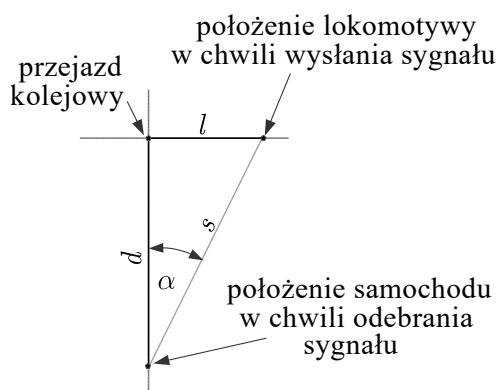
Prędkość modułu 1 tuż po wybuchu w układzie środka masy stacji (wzór (3) lub równoważny)	2 pkt
Wskazanie optymalnego miejsca i kierunku wystrzelenia modułu wraz z poprawną argumentacją (np. przy użyciu wzoru (5))	3 pkt
Wyznaczenie prędkości stacji w punkcie wyrzutu modułu (przed tym wyrzutem; wzór (8) lub równoważny)	2 pkt
Warunek jaki musi spełniać prędkość uzyskana przez moduł 1, aby ucieczka się powiodła (wzory (10), (11) lub równoważne)	1 pkt
Jawny wynik końcowy (wzór (12) lub równoważny)	1 pkt
Poprawny wynik liczbowy (wzór (13))	1 pkt

Uwagi dodatkowe

Proch strzelniczy ma energię wybuchu ok. 4 MJ/kg, a benzyna ciepło spalania ok. 42 MJ/kg, więc wymagana energia nie jest bardzo duża. Wynika to ze stosunkowo małej masy rozważanej planety karłowatej (rzędu 10^4 raza mniejszej niż masa Ziemi). Zauważmy też, że zgodnie ze wzorem (8) prędkość stacji w perycentrum wynosi ok. 323 m/s, natomiast prędkość ucieczki to (zgodnie ze wzorem (10)) ok. 354 m/s, czyli wymagany przyrost prędkości modułu to „zaledwie” 31 m/s.

Rozwiązanie zadania 2

Oznaczmy przez d odległość samochodu od przejazdu w chwili usłyszenia sygnału przez kierowcę, przez s odległość lokomotywy w chwili wysłania sygnału od samochodu w chwili odebrania sygnału, a przez l odległość lokomotywy w chwili wysłania sygnału od przejazdu – patrz rysunek.



Z trygonometrii mamy

$$\frac{l}{s} = \sin \alpha. \quad (14)$$

Czas przelotu dźwięku do samochodu wynosi

$$t_1 = \frac{s}{v_d}. \quad (15)$$

Jednocześnie jest to czas, w jakim lokomotywa dojechała z punktu wysłania sygnału do przejazdu, czyli

$$t_1 = \frac{l}{v_L}. \quad (16)$$

Stąd otrzymujemy

$$v_L = v_d \sin \alpha. \quad (17)$$

Zgodnie ze wzorem Dopplera częstotliwość f jest związana z częstotliwością f_0 wzorem

$$f = \frac{v_d + v_o}{v_d - v_z} f_0, \quad (18)$$

gdzie v_o jest prędkością (względem ośrodka, czyli w tym przypadku powietrza) odbiornika w kierunku źródła (czyli prostopadle do czoła odbieranej fali), natomiast v_z jest prędkością (względem ośrodka) źródła w kierunku miejsca, w którym sygnał dotrze do odbiornika. W naszym

przypadku powietrze jest nieruchome względem drogi oraz torów, więc z geometrii wynika, że $v_o = v_S \cos \alpha$, natomiast $v_L = v_L \sin \alpha$. Zatem

$$f = \frac{v_d + v_S \cos \alpha}{v_d - v_L \sin \alpha} f_0. \quad (19)$$

Stąd

$$v_S = \frac{v_d \cdot (f - f_0) - v_L f \sin \alpha}{f_0 \cos \alpha} = \quad (20)$$

$$= v_d \frac{(f - f_0) - f \sin^2 \alpha}{f_0 \cos \alpha}, \quad (21)$$

gdzie skorzystaliśmy ze wzoru (17).

Czas hamowania samochodu wynosił

$$t_2 = \frac{v_S}{a}. \quad (22)$$

W tym czasie lokomotywa przebyła drogę

$$x = v_L t_2. \quad (23)$$

Zatem w chwili zatrzymania samochodu, lokomotywa będzie się znajdować w odległości od niego równej

$$x = \frac{v_S v_L}{a} = \quad (24)$$

$$= v_d^2 \frac{(f - f_0) - f \sin^2 \alpha \sin \alpha}{f_0 \cos \alpha} \frac{1}{a}. \quad (25)$$

Dla podanych wartości liczbowych otrzymujemy

$$x = 470 \text{ m}. \quad (26)$$

Punktacja zadania 2.

- Związek między prędkością dźwięku a prędkością lokomotywy (wzór (17) lub równoważny) – wraz z wyprowadzeniem 2 pkt
 Ogólna postać wzoru Dopplera wraz z jasnym określeniem występujących tam zmiennych (wzór (18)) 1 pkt
 Częstotliwość f wyrażona przez częstotliwość f_0 , prędkości samochodu, lokomotywy oraz kąt α (wzór (19)) 2 pkt
 Szukana odległość wyrażona przez prędkości lokomotywy i samochodu oraz przez przyspieszenie w trakcie hamowania (wzór (24)) 2 pkt
 Jawny wynik na szukaną odległość lokomotywy od przejazdu (wzór (25) lub równoważny) 2 pkt
 Poprawna wartość liczbową (wzór (26)) 1 pkt

Rozwiązanie zadania 3

Oznaczmy przez $f(i_1, i_2)$ siłę oddziaływania prądów między rozważanymi dwoma częściami rury, w sytuacji gdy gęstość liniowa (czyli natężenie prądu na jednostkę długości wzdłuż obwodu rury) prądu płynącego na górnej części wynosi i_1 , a na dolnej i_2 . Przyjmujemy konwencję, w której $f > 0$ oznacza siłę przyciągającą. Przy obliczaniu siły działającej na górną część rury możemy pominąć siły wzajemnego oddziaływania między prądami płynącymi w tej części, gdyż suma tych sił wynosi 0 zgodnie z trzecią zasadą dynamiki. Siła oddziaływania pola wytwarzanego przez część dolną na część górną jest proporcjonalna do natężenia prądu płynącego w górnej części (zakładając, że prąd ten jest równomiernie rozłożony), a więc

$$f(i_1, i_2) = \frac{i_1}{i_0} f(i_0, i_2). \quad (27)$$

gdzie i_0 jest pewną gęstością prądu, stałą gdy i_1 się zmienia. Możemy przeprowadzić analogiczne rozumowanie zamieniając części 1 i 2, co prowadzi nas do wniosku, że

$$f(i_1, i_2) = \frac{i_1 i_2}{i_0^2} f(i_0, i_0). \quad (28)$$

Wzór na $f(i_0, i_0)$ możemy uzyskać korzystając z faktu, że indukcja pola magnetycznego wytwarzanego przez rurę o promieniu R , wzdłuż której płynie jednorodny prąd o natężeniu I_0 , tuż nad jej powierzchnią, jest taka jak indukcja pola magnetycznego w odległości R od cienkiego przewodu znajdującego się na osi rury, przez który płynie prąd o natężeniu I_0 . Indukcja wynosi zatem

$$B(R_+) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi R} = \mu_0 i_0, \quad (29)$$

gdzie $i_0 = I_0/(2\pi R)$. Wewnątrz rury indukcja pola magnetycznego jest w rozważanej sytuacji równa 0 – podobnie jak pole elektryczne wewnątrz jednorodnie naładowanej sfery jest równe 0. Zatem tuż pod powierzchnią rury

$$B(R_-) = 0. \quad (30)$$

Wzory (29) i (30) można też wyprowadzić korzystając z symetrii oraz prawa Ampère'a.

Siła elektrodynamiczna działająca na mały, w przybliżeniu płaski, wycinek (pasek) rury o szerokości (wzdłuż obwodu rury) Δd oraz długości (wzdłuż osi rury) Δl jest prostopadła do tego wycinka i wynosi

$$\Delta F = B_{zew} i_0 \Delta d \Delta l, \quad (31)$$

gdzie B_{zew} jest indukcją zewnętrznego w stosunku to tego wycinka pola magnetycznego, tzn. indukcją pola pochodzącą od pozostałych części rury. Indukcje pola magnetycznego tuż nad rurą oraz tuż pod rurą, czyli tuż nad wycinkiem, oraz tuż pod nim, spełniają związek

$$B(R_+) = B_{zew} + B_w, \quad (32)$$

$$B(R_-) = B_{zew} - B_w, \quad (33)$$

gdzie B_w jest indukcją pola magnetycznego pochodzącego od prądu płynącego w rozważanym wycinku, tuż nad tym wycinkiem, natomiast $-B_w$ jest indukcją pola magnetycznego pochodzącego od prądu płynącego w rozważanym wycinku, tuż pod tym wycinkiem. Skorzystaliśmy tu z antysymetrii pola magnetycznego pochodzącego od prądu płynącego wzdłuż płaskiej powierzchni, stąd znak minus w drugim przypadku (zauważmy, że podobnie jest w przypadku

indukcji pola magnetycznego pochodzącego od prostoliniowego, poziomego przewodnika – indukcja pola magnetycznego nad nim ma przeciwny zwrot niż indukcja pod nim). Z powyższego (wzory (32) i (33)) otrzymamy

$$B_{zew} = \frac{1}{2} (B(R_+) + B(R_-)) = \mu_0 \frac{i_0}{2}. \quad (34)$$

To znaczy, że siła działająca na rozważany wycinek jest równa

$$\Delta F = \mu_0 \frac{i_0^2}{2} \Delta d \Delta l. \quad (35)$$

Siła ta jest prostopadła do powierzchni tego wycinka, a $\Delta d \Delta l$ jest polem tej powierzchni. Oznacza to, że efekt przyciągania elektrodynamicznego między prądami płynącymi wzdłuż rury jest identyczny z efektem jaki wywołałoby dodatkowe ciśnienie na zewnątrz rury

$$p_B = \mu_0 \frac{i_0^2}{2}. \quad (36)$$

Siła między dwoma rozważanymi w zadaniu częściami rury wywołana przez takie ciśnienie równa jest iloczynowi tego ciśnienia i pola powierzchni rozgraniczającej dwa obszary odpowiadające częściom rury. Ta powierzchnia rozgraniczająca obszary jest w naszym przypadku prostokątem o szerokości

$$w = 2R \sin(\pi x), \quad (37)$$

i długości równej długości rury L .

W konsekwencji, siła przyciągania między częściami rury, przez którą płynie jednorodny prąd wynosi

$$f(i_0, i_0)L = wLp_B = \mu_0 R \sin(\pi x) Li_0^2. \quad (38)$$

W przypadku rozważanym w zadaniu gęstość liniowa prądu płynącego wzdłuż górnej części wynosi

$$i_1 = \frac{I}{2\pi R x}, \quad (39)$$

a gęstość liniowa prądu płynącego wzdłuż dolnej części

$$i_2 = \frac{-I}{2\pi R(1-x)}. \quad (40)$$

Siła elektrodynamiczna przyciągania między dwoma fragmentami jest więc równa

$$f(i_1, i_2)L = \frac{-I^2}{4\pi^2 R^2 x(1-x)} i_0^2 f(i_0, i_0)L = \mu_0 \frac{-I^2}{4\pi^2 x(1-x)} \frac{\sin(\pi x)L}{R}. \quad (41)$$

Powyżej znak minus oznacza, że ta siła jest siłą odpychającą.

Siła ta musi pokonać ciężar górnej części rury równy $2\pi x R L \lambda g$, co zachodzi gdy

$$I > \sqrt{\frac{(2\pi)^3 R^2 x^2 (1-x) \lambda g}{\mu_0 \sin(\pi x)}}, \quad (42)$$

Czyli minimalne natężenie prądu szukane w zadaniu wynosi

$$I_{\min} = \sqrt{\frac{(2\pi)^3 R^2 x^2 (1-x) \lambda g}{\mu_0 \sin(\pi x)}}. \quad (43)$$

Punktacja zadania 3.

Wyrażenie szukanej siły przez siłę w przypadku, gdy przez całą rurę płynie prąd o takiej samej gęstości liniowej (wzór (28) lub równoważne podejście) 2 pkt

Podzielenie rury na wąskie wycinki i, w przypadku takiej samej liniowej gęstości prądu na całym obwodzie, wyznaczenie indukcji zewnętrznego pola magnetycznego, w jakim znajduje się taki pasek (wzór (34) lub równoważny) 2 pkt.

Siła (wzór (35)) lub „ciśnienie” (wzór (36)) działające na pasek rozważany w punkcie 2.

2 pkt.

Siła z jaką obie części się przyciągają w przypadku, gdy płynie prąd jednorodny (wzór (38) lub równoważny) 2 pkt

Jawny wynik końcowy (wzór (43) lub równoważny) 2 pkt

Uwaga 1

Jeśli zawodnik nie uwzględnił czynnika $1/2$ we wzorze (34) to dostaje za ten wzór 1 pkt., przy czym jeśli kolejne wzory są poprawne z dokładnością do tego czynnika, to dostaje za nie pełną punktację za wyjątkiem wyniku końcowego, gdzie odlicza się mu kolejny 1 pkt.

Uwaga 2

Jeśli zawodnik nie uzasadnił rozważania takiej samej gęstości liniowej na całym obwodzie, to za 2. oraz 4. zostaje mu odjęte po jednym punkcie (czyli za poprawnie zrobione 2., 3. i 4. dostaje w sumie 4 pkt. (Oczywiście można najpierw rozważyć jednorodny rozkład prądów na całym obwodzie, a dopiero potem uzasadnić, jak taka sytuacja ma się do rozważanego zagadnienia – w takim przypadku punkty nie są odejmowane.)

Alternatywne rozwiązanie zadania 3

Podzielmy rurę wzdłuż osi na cienkie paski. Siła elektrodynamiczna działająca na pasek 1 o szerokości $Rd\alpha_1$, odchylony o kąt α_1 od płaszczyzny pionowej przechodzącej przez oś rury, pochodząca od paska o szerokości $Rd\alpha_2$ odchylonego o kąt α_2 od rozważanej płaszczyzny ma wartość

$$F_{12} = \mu_0 \frac{(i_1 Rd\alpha_1) \cdot (i_2 Rd\alpha_2)}{2\pi d} L, \quad (44)$$

gdzie

$$d = 2R \sin \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} \quad (45)$$

jest odległością między rozważanymi paskami, natomiast i_1 oraz i_2 to gęstości liniowe prądów płynących wzdłuż odpowiednich pasków, tzn. natężenia prądów płynących wzdłuż odpowiednich pasków wynoszą $i_1 Rd\alpha_1$ oraz $i_2 Rd\alpha_2$. Zauważmy, że wzór (44) jest zwykłym wzorem na siłę oddziaływania dwóch równoległych przewodów z prądem.

Interesuje nas sytuacja, gdy pasek 1 znajduje się w górnej części rury, tzn. $-\alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_0$, natomiast pasek 2 znajduje się w dolnej części rury, tzn. gdy $|\alpha_2| > \pi - \alpha_0$, gdzie $\alpha_0 = \pi x$ oraz przyjęliśmy zakres zmienności kątów od $-\pi$ do π . Zauważmy, że

$$i_1 = \frac{I}{2\pi R x}, \quad (46)$$

$$i_2 = -\frac{I}{2\pi R(1-x)}. \quad (47)$$

Oznaczmy przez \vec{d} wektor prostopadły do osi rury i skierowany od paska 2 do paska 1 (zgodnie z (45) $|\vec{d}| = d = 2R \sin(\alpha_2 - \alpha_1)$). Pochodząca od paska 2 siła działająca na pasek 1 jest skierowana wzdłuż wektora \vec{d} . Nas interesuje jej składowa pionowa, równa

$$F_{12z} = -F_{12} \frac{d_z}{d}, \quad (48)$$

gdzie d_z jest pionową składową wektora \vec{d} , równą

$$d_z = R \cos \alpha_1 - R \cos \alpha_2. \quad (49)$$

Podstawiając wzory (44), (45), (49) do wzoru (48) otrzymamy

$$F_{12z} = -\mu_0 i_1 i_2 \frac{\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2}{8\pi \sin^2 \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}} R L d \alpha_1 d \alpha_2. \quad (50)$$

Zauważmy, że

$$\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2 = -2 \sin \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \sin \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2},$$

zatem

$$F_{12z} = \mu_0 i_1 i_2 \frac{\sin \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}}{4\pi \sin \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}} R L d \alpha_1 d \alpha_2. \quad (51)$$

Zauważmy, że dla $\alpha_1 = 0$ i przyjmując zakres zmienności α_2 od 0 do 2π , otrzymujemy siłę działającą na pasek 1 zgodną ze wzorem (35).

Wyrażenie na F_{12z} należy scałkować po zakresie zmienności α_2 : od $-\pi$ do $-\alpha_0$ i od α_0 do π , oraz po α_1 : od $-\alpha_0$ do α_0 , tzn. szukana siła jest równa

$$F_z = \mu_0 i_1 i_2 \frac{RL}{4\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} d\alpha_1 \left(\int_{-\pi}^{-\alpha_0} d\alpha_2 \frac{\sin \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}}{\sin \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}} + \int_{\alpha_0}^{\pi} d\alpha_2 \frac{\sin \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}}{\sin \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}} \right). \quad (52)$$

Zauważmy, że

$$\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} d\alpha_1 \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} d\alpha_2 \frac{\sin \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}}{\sin \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}} = 0, \quad (53)$$

co wynika z antysymetrii wyrażenia podcałkowego przy zamianie α_1 i α_2 .

To oznacza, że w całce na F_z możemy rozszerzyć granice całkowania po α_2

$$F_z = \mu_0 i_1 i_2 \frac{RL}{4\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} d\alpha_1 \int_{-\pi}^{\pi} d\alpha_2 \frac{\sin \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}}{\sin \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}}. \quad (54)$$

Ponieważ

$$\begin{aligned}\sin \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} &= \sin \left(\alpha_1 - \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} \right) = \\ &= \sin \alpha_1 \cos \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} - \cos \alpha_1 \sin \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2},\end{aligned}$$

otrzymamy

$$F_z = \mu_0 i_1 i_2 \frac{RL}{4\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} d\alpha_1 \int_{-\pi}^{\pi} d\alpha_2 \left(\sin \alpha_1 \operatorname{ctg} \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} - \cos \alpha_1 \right). \quad (55)$$

Całka z $\operatorname{ctg} \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}$ jest po pełnym okresie funkcji cotangens równym π (od $\alpha_1/2 - \pi/2$ do $\alpha_1/2 + \pi/2$) a zatem jest równa 0.

Ostatecznie otrzymamy

$$F_z = -\mu_0 i_1 i_2 \frac{RL}{2} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} d\alpha_1 \cos \alpha_1 = \quad (56)$$

$$= -\mu_0 i_1 i_2 RL \sin \alpha_0. \quad (57)$$

To jest wzór zgodny ze wzorem (38), przy czym inny znak bierze się stąd, że dodatnie F_z oznacza siłę skierowaną do góry. Zatem tą metodą znowu otrzymamy wynik (42).

Punktacja alternatywnego rozwiązania zadania 3

- Siła oddziaływania elektrodynamicznego między wąskimi paskami rury (wzory (44) oraz (45) lub równoważne) 1 pkt
- Jawna postać pionowej składowej siły oddziaływania elektrodynamicznego między wąskimi paskami rury (wzór (50) lub równoważny) 1 pkt
- Pionowa składowa siły elektrodynamicznej działającej na górną część rury w postaci całki (wzór (52) lub równoważny) 2 pkt.
- Zauważenie, że można rozszerzyć zakres wewnętrznej całki do kąta pełnego, wraz z uzasadnieniem w postaci całki (53) lub równoważnym 1 pkt
- Siła elektrodynamiczna działająca na górną część rury (wzór (57) lub równoważny) . 3 pkt
- Jawny wynik końcowy (wzór (43) lub równoważny) 2 pkt