



LXXIV OLIMPIADA FIZYCZNA

ZAWODY II STOPNIA

CZĘŚĆ DOŚWIADCZALNA, 16.02.2025 r.

Za zadanie można otrzymać maksymalnie 40 punktów.

Masz do dyspozycji:

- wagę elektroniczną (pozwalającą na pomiary masy do 500 g z rozdzielczością 0,01g);
- sól kuchenną (NaCl, około 150 gramów) w postaci sypkiej;
- kolbę szklaną o pojemności ok. 50 ml;
- dwa przezroczyste plastikowe naczynia, każde o pojemności ok. 200 ml;
- dwie małe plastikowe pipety;
- wodę (około 1,5 litra) i naczynie na zużyte substancje;
- ręcznik papierowy.

Wyznacz gęstość ziaren (kryształków) soli kuchennej. Przyjmij gęstość wody $\rho_w = 1,00 \text{ g/cm}^3$.

UWAGA 1: W zadaniu chodzi o gęstość ziaren soli kuchennej wyrażoną jako iloraz masy i ich objętości (sumarycznej objętości ziaren soli, bez uwzględnienia przestrzeni między nimi).

UWAGA 2: Podziałka na kolbie jest orientacyjna, nie należy z niej korzystać.

ROZWIĄZANIE

Pozornie oczywiste pojęcie gęstości (iloraz masy i objętości substancji) nastrocza pewnych trudności w przypadku substancji sypkich, jak np. piasek czy cukier. Procedura polegająca na podzieleniu masy piasku wypełniającego litrowe naczynie przez objętość tego naczynia da nam wynik znacząco mniejszy niż gęstość tworzącego ziarna tej substancji materiału, w tym przypadku krzemionki (a krystalicznej sacharozy w przypadku cukru), gdyż w skład objętości substancji sypkiej wliczana jest wtedy nie tylko łączna objętość ziaren, ale i objętość pustych obszarów pomiędzy ziarnami.

Gęstość wyznaczona taką metodą nazywana jest, dla odróżnienia od gęstości samej tworzącej proszek substancji, gęstością nasypową (ang.: bulk density). Taka gęstość silnie zależy od tego, jak mocno rozważana substancja sypka jest ubita (dlatego czynność ubijania gruntu, niezbędna przy wielu pracach budowlanych, fachowo nazywana jest zagęszczaniem).

Podstawową trudnością powyższego zadania doświadczalnego był fakt, że nie pytamy o – łatwą do wyznaczenia – gęstość nasypową, a o gęstość w ścisłym sensie.

Część teoretyczna

Aby wyznaczyć gęstość soli, potrzebujemy zmierzyć masę i sumaryczną objętość kryształków soli.

Dysponujemy wagą, zatem pomiar masy jest bezproblemowy. Znacznie trudniejsze jest wyznaczenie objętości substancji sypkiej. Zarazem waga jest naszym jedynym przyrządem pomiarowym, należy więc przypuszczać, że do wyznaczenia objętości będziemy musieli posłużyć się pomiarem masy substancji o znanej gęstości – treść zadania sugeruje wodę.

Ważąc kolbę pustą (m_0) i kolbę napełnioną całkowicie wodą (m_1) możemy wyznaczyć objętość kolby jako:

$$V = \frac{m_1 - m_0}{\rho_w} \quad (1)$$

Załóżmy na chwilę, że mamy do czynienia z substancją sypką, o gęstości ρ_s , która nie rozpuszcza się w wodzie (dobrym przykładem jest piasek). Wtedy możemy nasypać jej nieco do kolby (np. 1/4 objętości) i zważyć (oznaczymy wynik jako m_2), a następnie uzupełnić tę kolbę do pełna wodą (całkowita masa m_3). Dolana woda o masie $m_3 - m_2$ zajmuje pozostałą objętość kolby, której nie wypełnił piasek, zatem suma objętości substancji sypkiej (V_s) i dopełniającej wody (V_w) wynosi:

$$V_s + V_w = \frac{m_2 - m_0}{\rho_s} + \frac{m_3 - m_2}{\rho_w} \quad (2)$$

i musi być równa objętości kolby, opisanej równaniem (1).

Z przyrównania (1) i (2) możemy wyznaczyć gęstość substancji sypkiej, gdyż jest to jedyna występująca tam nieznaną wielkość. Wygodnie będzie przedstawić ją jako wielokrotność gęstości wody:

$$\frac{\rho_s}{\rho_w} = \frac{m_2 - m_0}{m_2 - m_0 - m_3 + m_1} = \frac{m_2 - m_0}{m_2 - m_0 - (m_3 - m_1)} \quad (3)$$

Różnica $m_2 - m_0$ jest masą substancji sypkiej, a $m_3 - m_1$ różnicą mas kolb napełnionych do pełna, z substancją sypką i wodą oraz tylko wodą (różnica ta będzie dodatnia – o ile badana substancja sypka ma gęstość większą niż woda).

Pozostaje do rozwiązania problem, że sól kuchenna rozpuszcza się w wodzie. Możemy jednak, dysponując nadmiarem soli i dodatkowym naczyniem, sporządzić nasycony roztwór soli i użyć go zamiast wody w powyżej opisanej procedurze, rozwiązując tym samym problem rozpuszczalności.

Wtedy uzyskany wyżej iloraz mas będzie stosunkiem gęstości soli do gęstości nasyconego roztworu soli:

$$\frac{\rho_s}{\rho_n} = \frac{m_2 - m_0}{m_2 - m_0 - (m_{3n} - m_{1n})} \quad (4)$$

gdzie ρ_n to gęstość nasyconego roztworu soli, a masy m_{1n} i m_{3n} to odpowiedniki mas m_1 i m_3 , gdzie zamiast wody użyto nasyconego roztworu soli.

Wyrażenie gęstości soli przez znane wielkości (w szczególności poprzez gęstość wody) możliwe jest poprzez przemnożenie powyższego stosunku przez stosunek gęstości nasyconego roztworu soli i wody.

$$\frac{\rho_s}{\rho_w} = \frac{\rho_s}{\rho_n} \cdot \frac{\rho_n}{\rho_w} \quad (5)$$

Ten ostatni łatwo wyznaczyć porównując masy obu tych cieczy wypełniających w całości kolbę, gdyż wtedy objętości cieczy będą takie same, a zatem stosunek mas będzie stosunkiem gęstości:

$$\frac{\rho_n}{\rho_w} = \frac{(m_{1n} - m_0)/V}{(m_1 - m_0)/V} = \frac{m_{1n} - m_0}{m_1 - m_0} \quad (6)$$

A zatem ostateczny wynik dany jest wzorem:

$$\frac{\rho_s}{\rho_w} = \frac{m_2 - m_0}{m_2 - m_0 - (m_{3n} - m_{1n})} \cdot \frac{m_{1n} - m_0}{m_1 - m_0} \quad (7)$$

Część doświadczalna

Sporządzamy nasycony roztwór soli kuchennej. W tym celu należy nasypać do jednego z plastikowych naczyń sporą ilość soli, zalać wodą i cierpliwie mieszać, najwygodniej za pomocą pipety, kilka minut. Jeśli po tym czasie cała sól się rozpuści – należy dodać więcej soli i mieszać dalej. Dążymy do osiągnięcia stanu, gdy mimo ustawicznego mieszania sól już się nie rozpuszcza, i na dnie naczynia pozostaje nierozpuszczony proszek.

Dobrym sposobem sprawdzenia, czy roztwór jest już nasycony, jest pozostawienie go w spokoju na chwilę, a następnie delikatne zamieszanie cieczy i przyglądanie się, czy w naczyniu widoczne są „przezroczyste smugi” powstałe wskutek wystąpienia w cieczy obszarów o różnym współczynniku załamania, wynikającym z różnego stężenia soli. Jeśli tak – należy mieszać dalej, aż do ustąpienia zjawiska.

Niedroga elektroniczna waga jubilerska mierzy powtarzalnie z rozdzielczością 0,01 g, zatem przyjmujemy, że masy m_0 i m_2 (pusta kolba i kolba z solą) będą wyznaczone z dokładnością równą rozdzielczości przyrządu.

Natomiast masy kolby napełnionej do pełna będą obarczone większą niepewnością, związaną z faktem, że musimy „na oko” decydować, przy jakim stanie menisku uznajemy kolbę za napełnioną do pełna. Warunkiem uzyskania możliwie małego rozrzutu wyników jest osiągnięcie takiego samego poziomu cieczy za każdym napełnieniem. Rozrzut masy związany z napełnianiem

można oszacować kilkakrotnie kontrolując masę pełnej kolby (nie trzeba jej opróżniać całkowicie, wystarczy pipetą zabrać 1–2 ml cieczy i napełnić ponownie starając się otrzymać identyczny menisk, nie podglądając przy tym wskazania wagi). Jednakże nawet przy zachowaniu dużej staranności, niepewności wyznaczenia mas m_{1n} , m_{3n} i m_1 będą kilkakrotnie większe, niż niepewności mas m_0 i m_2 .

Zauważmy, że obserwacja ta może pomóc w podjęciu decyzji, jaką ilość soli wziąć do pomiaru. Skoro w liczniku równania (4) mamy dokładnie wyznaczoną masę soli, a w mianowniku tę samą masę pomniejszoną o – znacznie mniej dokładnie wyznaczoną – różnicę mas kolb dopełnianych do pełna cieczą, to korzystnie jest, by masa soli była możliwie duża. Dobrze jest zatem wsypać do kolby sporą ilość soli, oczywiście w rozsądnych granicach, gdyż musimy zachować możliwość wymieszania soli i dopełniającej cieczy.

Optymalna procedura wyznaczenia gęstości soli wygląda zatem następująco: w kubeczku sporządzamy nasycony roztwór soli; ważymy pustą kolbę (m_0), kolbę wypełnioną całkowicie wodą (m_1) i kolbę wypełnioną nasyconym roztworem soli (m_{1n}) – przed tym ostatnim pomiarem wycieramy ręcznikiem papierowym kolbę od środka, by uniknąć rozcieńczenia tego roztworu resztkami wody. Następnie ponownie osuszamy kolbę, wsypujemy pewną (z wcześniejszych rozważań wynika, że lepiej dużą) ilość soli, ważymy (m_2), a następnie dopełniamy nasyconym roztworem soli (mieszając w trakcie, by mieć pewność, że roztwór wnikał we wszystkie obszary między kryształkami soli) i ważymy (m_{3n}).

Tym samym mamy zmierzone wszystkie masy potrzebne do wyznaczenia gęstości soli, obecne we wzorze (7).

Zauważmy, że nasycony roztwór soli nie zużywa się w tym doświadczeniu – możemy zlać go z kolby z powrotem do naczynia (nie szkodzi, jeśli przy tej okazji spłynie nam z kolby do naczynia nieco „solnego błota”) i – jeśli czas pozwoli – wykonać doświadczenie ponownie, np. z nieco inną ilością soli. Ponowne wykonanie doświadczenia oznacza powtórne zważenie soli i soli zalanej nasyconym roztworem (pozostałe masy się nie zmieniają i mamy je już zmierzone), zatem jest znacznie szybsze, a da nam informację o powtarzalności naszej procedury.

Literatura podaje gęstość NaCl w postaci krystalicznego minerału (halit) jako 2,1–2,2 g/cm³ (anglojęzyczna Wikipedia, na podstawie tablic geologicznych – 2,17 g/cm³). Dla porównania – gęstość nasypowa użytej w doświadczeniu drobnokrystalicznej soli warzonej wynosi ok. 1,3 g/cm³.

Tabela 1. Wyniki pomiarów dla czterech różnych ilości soli

Lp.	masa soli, g	m_0 , g	m_1 , g	m_2 , g	m_{1n} , g	m_{3n} , g	ρ_s , g/cm ³
1	06,92	36,95	89,26	43,87	99,86	102,98	2,19
2	07,71	36,95	89,26	44,66	99,86	103,08	2,07
3	12,13	36,95	89,26	49,08	99,86	105,24	2,16
4	19,48	36,95	89,26	56,43	99,86	108,61	2,18

Niepewność tych wyników można oszacować w sposób elementarny korzystając z wartości skrajnych (sposób zbieżny z tzw. metodą najmniej korzystnego przypadku).

Pomiary bezpośrednie „suchych” mas (m_0 i m_2): ponieważ wyniki były identyczne dla wszystkich wazów więc przyjęto niepewność pomiaru odpowiadającą rozdzielczości wagi (tzw. niepewność graniczna), tj. $\Delta m_0 = \Delta m_2 = 0,01$ g. Pomiary mas wymagających dopełniania cieczy do krawędzi kolby: ponieważ nieunikniony był rozrzut wyników masy kolby z nasyconym roztwo-

rem soli, napełnionej kilkakrotnie do pełna i ważonej po każdym dopełnieniu, więc przyjęto niepewność pomiaru jako połowę różnicy między największą i najmniejszą z otrzymanych wartości, która wyniosła 0,10 g, tj. $\Delta m_1 = \Delta m_{1n} = \Delta m_{3n} = 0,10$ g.

Niepewność wyznaczenia gęstości obliczono korzystając z końcowego wzoru (7). Ponieważ gęstość wody wynosi $1,00 \text{ g/cm}^3$ – i uznajemy ją za dokładną – więc wartość niepewności ilorazu ρ_s/ρ_w jest niepewnością gęstości ziaren soli kuchennej, pomijając jednostkę. W tym celu znaleziono największą i najmniejszą wartość ρ_s/ρ_w , których połowę różnicy przyjęto za niepewność pomiaru. (Skrajne wartości dla ρ_s/ρ_w otrzymamy wstawiając do wzoru (7) wszystkie masy zmodyfikowane – powiększone lub pomniejszone o niepewność – tak, by uzyskać największą i najmniejszą wartość.) Zebrane wyniki przedstawia Tabela 2.

Tabela 2. Niepewności pomiarowe dla danych z tabel 1

Lp.	masa soli, g	$\Delta m_0, \Delta m_2,$ g	$\Delta m_1, \Delta m_{1n}, \Delta m_{3n},$ g	$(\rho_s/\rho_w)_{\min}$	$(\rho_s/\rho_w)_{\max}$	$\Delta \rho_s,$ g/cm^3	$u(\rho_s),$ g/cm^3
1	06,92	0,01	0,10	2,056	2,340	0,14	0,08
2	07,71	0,01	0,10	1,956	2,186	0,11	0,07
3	12,13	0,01	0,10	2,081	2,246	0,08	0,05
4	19,48	0,01	0,10	2,129	2,240	0,06	0,03

Przytoczone niepewności dobrze potwierdzają przedstawione wyżej rozumowanie, że lepiej jest wykonać pomiary z większą ilością soli.

Dla porównania, w ostatniej kolumnie tabeli 2 przytoczono niepewności $u(\rho_s)$ – obliczając je jako pierwiastek z sumy kwadratów niezależnych udziałów niepewności – korzystając z zaleceń w: *Rekomendacja Polskiego Towarzystwa Fizycznego dotycząca nauczania o opracowywaniu wyników pomiarów w szkołach* – <https://www2022.ptf.net.pl/programy/edukacja/rekomendacja>.

Przygotowujący doświadczenie przewidywał, że najbardziej popularnym błędem w wykonaniu tego eksperymentu będzie użycie wody, a nie nasyconego roztworu soli. Zatem istotną dla doświadczenia kwestią jest to, czy przeprowadzone w ten niepoprawny sposób doświadczenie da zauważalnie niepoprawny wynik. Testowo wykonano w taki sposób doświadczenie dla trzech mas soli (około 6, 13 i 18 gramów) i otrzymano gęstości odpowiednio: 2,48; 2,45 i 2,41 g/cm^3 ; zatem wyniki te są, biorąc pod uwagę szacowane powyżej niepewności pomiaru, znacząco różne od poprawnych. Przyczyną tej różnicy jest rozpuszczalność soli, a dokładniej fakt, że wodny roztwór soli ma mniejszą objętość, niż sumaryczne objętości soli i wody.