LXXIV OLIMPIADA FIZYCZNA

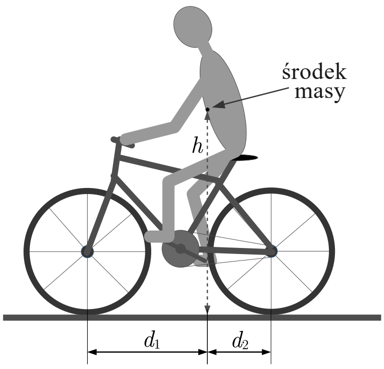
ZAWODY II STOPNIA

CZĘŚĆ TEORETYCZNA, 12.01.2025

Za każde zadanie można otrzymać maksymalnie 20 punktów.

Zadanie 1

Minimalna droga hamowania roweru (wraz z rowerzystą) od prędkości v_0 do zatrzymania, gdy rowerzysta używa tylko tylnego hamulca, wynosi l_1. Środek masy roweru wraz z rowerzystą jest na wysokości h nad drogą, odległości w poziomie: osi przedniego koła od środka masy wynosi d_1, a osi tylnego koła od środka masy wynosi d_2, patrz rysunek.

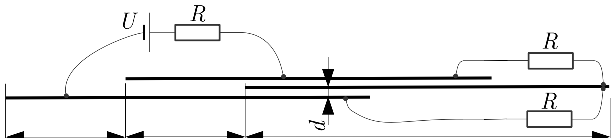


Wyznacz minimalną drogę hamowania l_2 od prędkości v_0 do zatrzymania na tej samej nawierzchni, gdy rowerzysta może używać obu hamulców, ale nie może dopuścić do oderwania się żadnego z kół od drogi. Droga jest pozioma. Przyspieszenie ziemskie wynosi g.

Wyznacz wartość l_2 dla $v_0 = 7{,}0$ m/s, $d_1 = 0{,}6$ m, $d_2 = 0{,}5$ m, $h = 1{,}0$ m, $g = 9{,}81$ m/s^2, w dwóch przypadkach wartości l_1: $l_1 = 10$ m oraz $l_1 = 13$ m.

Oba hamulce są sprawne – odpowiedni duży nacisk może spowodować zablokowanie kół. Na obu kołach są takie same opony. Przyjmij, że momenty bezwładności kół są zaniedbywalnie małe. Pomiń opór powietrza oraz opory związanie z toczeniem kół. Pozycja rowerzysty względem roweru nie ulega zmianie podczas hamowania.

Zadanie 2



Rozważmy trzy równoległe, cienkie płytki metalowe o wymiarach $a \times b$. Sąsiednie płytki są w odległości d od siebie, przy czym $d \ll a, b$. Środkowa płytka (2) jest przesunięta względem górnej (1) wzdłuż a o $a/3$, a dolna (3) jest przesunięta względem górnej wzdłuż a o $-a/3$. Płytki 1 i 2 oraz płytki 2 i 3 są połączone ze sobą opornikami o oporności R każdy. Zewnętrzne płytki są podłączone poprzez opornik o oporności R do baterii o napięciu U – patrz rysunek.

Wyznacz całkowite ładunki na każdej z płytek. Przenikalność elektryczna próżni wynosi ε_0.

Zadanie 3

Jednym z najprostszych rodzajów silnika spalinowego jest silnik pracujący w następującym cyklu:

1. Mieszanka paliwa z powietrzem o temperaturze początkowej T_0 i ciśnieniu początkowym p_0, gdzie T_0 oraz p_0 to temperatura i ciśnienie otoczenia, wybucha w stałej objętości; w wyniku tego temperatura i ciśnienie wzrastają. Proces zachodzi adiabatycznie.
2. Gazy powstałe w pkt. 1. ulegają adiabatycznemu rozprężaniu (tłok się przesuwa wykonując przy tym pracę użyteczną) aż do osiągnięcia przez nie ciśnienia otoczenia.
3. Zawory zostają otwarte, a tłok przesuwa się usuwając do otoczenia wszystkie produkty spalania.
4. Tłok przesuwa się zasysając powietrze wraz z paliwem aż objętość będzie równa objętości z pkt. 1. Zawory zostają zamknięte i cykl się powtarza.

Zakładamy, że nie występuje wymiana ciepła między silnikiem (tłokiem i cylindrem) a gazami – tzn. że silnik się nie nagrzewa.

Rozważmy sytuację w której paliwem jest metan (CH_4). Spalanie metanu przebiega zgodnie z równaniem

$$CH_4 + 2O_2 \rightarrow CO_2 + 2H_2O + Q_s,$$

gdzie Q_s jest ciepłem, w dżulach na mol metanu, tej reakcji (przy stałej objętości).

Przyjmując, że skład molowy powietrza to 80 % azotu (N_2), a 20 % to tlen (O_2), oraz że molowe ciepło właściwe przy stałej objętości mieszaniny gazów po wybuchu jest stałe i równe C_V, wyznacz maksymalną możliwą teoretycznie sprawność rozważanego silnika.

Podaj wartość liczbową tej sprawności dla $C_V = 20{,}8$ J/(mol·K), $Q_s = 891 \cdot 10^3$ J/mol, $T_0 = 300$ K. Uniwersalna stała gazowa $R = 8{,}31$ J/(mol·K).

Przyjmij, że metan jest przechowany w zbiorniku pod ciśnieniem niewiele większym od ciśnienia atmosferycznego, w związku z tym praca wykonana (lub ewentualnie uzyskana) przy mieszaniu metanu z powietrzem jest pomijalna w rozważanym zagadnieniu. Przyjmij też, że H_2O będzie występować w postaci pary i że jest gazem doskonałym.

Uwzględnij, że przy rozprężaniu adiabatycznym zachodzi

$$pV^{\varkappa} = \text{const},$$

gdzie $\varkappa = (C_V + R)/C_V$, natomiast R jest uniwersalną stałą gazową.

Uwaga:

Największa możliwa sprawność zależy od ułamka molowego x metanu w wejściowej mieszance, zatem wyznaczenie właściwego x jest częścią zadania.

Rozwiązanie zadania 1

Oznaczmy przez N_1 nacisk przedniego koła na jezdnię, a przez N_2 – nacisk tylnego koła.

Ponieważ rower nie porusza się się w kierunku prostopadłym do podłoża, mamy

$$N_1 + N_2 = mg, \tag{1}$$

gdzie m jest masą roweru wraz z rowerzystą, a g – przyspieszeniem ziemskim.

Rower się nie obraca (koła nie odrywają się od podłoża), zatem momenty sił względem środka masy się równoważą, czyli

$$N_1 d_1 - N_2 d_2 = T_1 h + T_2 h, \tag{2}$$

gdzie T_1 oraz T_2 są siłami tarcia podłoża działającymi odpowiednio na przednie oraz tylne koło.

Zgodnie z II zasadą dynamiki, przyspieszenie roweru a (dodatnie – zgodne z przemieszczaniem się roweru; ponieważ rozważamy hamowanie, a jest ujemne) spełnia równanie

$$ma = -\left(T_1 + T_2\right), \tag{3}$$

co daje

$$N_1 d_1 - N_2 d_2 = -mah. \tag{4}$$

Gdy używamy tylko tylnego hamulca i hamujemy tak, by droga hamowania była minimalna, zachodzi

$$\begin{aligned} T_1 &= 0, &(5)\\ T_2 &= fN_2, &(6) \end{aligned}$$

gdzie f jest współczynnikiem tarcia opony o jezdnię (jest to współczynnik tarcia statycznego, bo minimalną drogę możemy uzyskać tylko jeśli nie ma poślizgu). Zauważmy, że gdyby uwzględnić moment bezwładności przedniego koła, to przy założeniu, że przednie koło nie ślizga się po podłożu, T_1 byłoby ujemne – przy braku działania hamulca, ta siła tarcia powodowałaby hamowanie ruchu obrotowego przedniego koła.

Podstawiając T_1 i T_2, a także $N_1 = mg - N_2$ do równania (2), otrzymamy

$$N_2 = mg\frac{d_1}{d_1 + d_2 + fh}. \tag{7}$$

Zauważmy, że $N_2 > 0$. Ponieważ $N_2 \leqslant mg$, stąd również $N_1 > 0$. Oznacza to, że przy hamowaniu tylnym kołem żadne z kół nie oderwie się od podłoża.

Zatem

$$-a = fg\frac{d_1}{d_1 + d_2 + fh}. \tag{8}$$

Wyznaczamy stąd f

$$f = \frac{d_1 + d_2}{-\frac{g}{a} d_1 - h}. \tag{9}$$

Zauważmy, że formalnie powyższe wyrażenie może być ujemne. W praktyce oznacza to, że wartość „opóźnienia” $-a$ nie może być dowolnie duża i musi spełniać warunek

$$-a < g\frac{d_1}{h}. \tag{10}$$

Graniczną (maksymalną) wartość $-a$ możemy też dostać ze wzoru (8) przechodząc granicznie z f do nieskończoności.

Wartość przyspieszenia wyznaczamy na podstawie długości drogi hamowania. Można np. skorzystać z tego, że praca wykonana przez siłę tarcia jest równa zmianie energii kinetycznej

$$-mal_1 = m\frac{v_0^2}{2}.$$

Stąd

$$-a = \frac{v_0^2}{2l_1}, \tag{11}$$

a zatem

$$f = \frac{d_1 + d_2}{2gl_1 d_1/v_0^2 - h}. \tag{12}$$

Zauważmy, że podobnie jak poprzednio „opóźnienie” nie mogło być dowolnie duże (nierówność (10)), w realnej sytuacji również l_1 nie może być na tyle małe, by mianownik w powyższym wzorze był ujemny lub równy zeru.

Gdy możemy korzystać z obu hamulców, to maksymalne „opóźnienie” wynosi

$$-a_2 = fg,$$

co odpowiada drodze hamowania

$$\begin{aligned} l_2 &= \frac{v_0^2}{2gf} && (13)\\ &= \frac{v_0^2}{2g}\frac{2l_1 g d_1/v_0^2 - h}{d_1 + d_2}. && (14) \end{aligned}$$

Musimy jednak sprawdzić, czy tylne koło nie odrywa się od jezdni. W tym celu z równań (1) oraz (4) wyznaczamy siłę nacisku tylnego koła N_2

$$N_2 = \frac{mgd_1 + mah}{d_1 + d_2}. \tag{15}$$

N_2 jest równe 0, czyli tylne koło jest na granicy oderwania gdy

$$gd_1 + ah = 0.$$

Czyli maksymalne „opóźnienie” niepowodujące oderwania tylnego koła jest równe

$$-a_{\max} = g\frac{d_1}{h}. \tag{16}$$

Zatem dla

$$f > \frac{d_1}{h}, \tag{17}$$

czyli gdy

$$\frac{d_1 + d_2}{2gl_1d_1/v_0^2 - h} > \frac{d_1}{h}, \tag{18}$$

minimalna droga jest ograniczona przez warunek nie odrywania się tylnego koła i wynosi

$$l_2 = \frac{v_0^2 h}{2gd_1}. \tag{19}$$

Zauważmy, że wyprowadzając wzór (19) nie korzystaliśmy z faktu, że hamowane są obydwa koła. Wzór ten jest w rzeczywistości dolnym ograniczeniem drogi hamowania roweru w dowolnym przypadku, w szczególności jest to też dolne ograniczenie na l_1.

W przypadku

$$\frac{d_1 + d_2}{2gl_1d_1/v_0^2 - h} \leqslant \frac{d_1}{h}, \tag{20}$$

minimalna droga jest ograniczona przez wartość współczynnika tarcia i wynosi

$$l_2 = \frac{l_1 d_1 - hv_0^2/\left(2g\right)}{d_1 + d_2}. \tag{21}$$

Formalnie wartość powyższego wyrażenia może być ujemna. Wynika to z dyskutowanego poprzednio faktu, że nawet przy nieskończonym współczynniku tarcia l_1 nie może być dowolnie małe; warunek

$$l_1 d_1 - \frac{hv_0^2}{2g} \geqslant 0$$

odpowiada dokładnie temu, że „opóźnienie” jest ograniczone wartością (16).

Zauważmy, że jeśli z rozważania tylko tarcia otrzymamy drogę krótszą, niż z warunku nieodrywania sie tylnego koła, to znaczy że nie możemy przyjąć tego pierwszego rozwiązania, bo tylne koło będzie się odrywać. Podobnie, jeśli z rozważania tylko tarcia otrzymamy drogę dłuższą, niż z warunku nieodrywania sie tylnego koła, to znaczy że tarcie nie jest wystarczające, by tylne koło się oderwało, a zatem właściwe jest rozwiązanie pierwsze. Zatem nie trzeba jawnie stosować warunku wyboru właściwego rozwiązania, gdyż odpowiada ono maksimum z wyników (21) oraz (19).

Dla podanych danych liczbowych otrzymamy:

$$l_2 = 4{,}2\ \text{m} \quad \text{dla} \quad l_1 = 10\ \text{m (zachodzi warunek (18))}, \tag{22}$$
$$l_2 = 4{,}8\ \text{m} \quad \text{dla} \quad l_1 = 13\ \text{m (zachodzi warunek (20))}. \tag{23}$$

Rozwiązanie wykorzystujące układ nieinercjalny

W układzie nieinercjalnym współporuszającym się z rowerem z przyspieszeniem a, na rower prócz sił tarcia T_1, T_2, reakcji podłoża N_1, N_2 oraz grawitacji mg (patrz powyższe rozwiązanie), działa skierowana poziomo i przyłożona w środku masy siła bezwładności $-ma$. Jeśli rower jako całość się nie obraca, to suma działających na rower momentów sił względem punktu styczności przedniego koła z podłożem jest równa 0, tzn.

$$N_2\,(d_1 + d_2) - mah - mgd_1 = 0. \tag{24}$$

W powyższym równaniu nie występują siły tarcia oraz siła N_1 gdyż ramiona tych sił względem rozważanego punktu są równe 0.

Z powyższego otrzymamy

$$N_2 = \frac{mah + mgd_1}{d_1 + d_2}, \tag{25}$$

czyli równanie ((15).

Ponieważ siła reakcji podłoża nie może być ujemna, przyspieszenie jest ograniczone warunkiem

$$-a \leqslant \frac{d_1}{h}.$$

To jest oczywiście ten sam warunek, co (16). Zauważmy, że do tej pory nie precyzowaliśmy, czy hamujemy tylnym hamulcem, czy oboma.

Jeśli hamujemy tylko tylnym hamulcem, tak by droga hamowania była najmniejsza, to jedyna siła hamująca rower jest równa $-fN_2$, a zatem

$$ma = -fN_2. \tag{26}$$

czyli

$$a = -f\frac{ah + gd_1}{d_1 + d_2}. \tag{27}$$

Stąd możemy wyznaczyć f, otrzymując jak poprzednio równanie (9).

Dalsze rozwiązanie może przebiegać analogicznie jak poprzednio, z tym, że mamy już N_2 wyrażone przez a oraz warunek nieodrywania się tylnego koła roweru.

Punktacja zadania 1.

Równania pozwalające wyznaczyć związek między przyspieszeniem a a współczynnikiem tarcia f (równania (1–6) lub równoważne, np. równania (25) oraz (26)) .... 2 pkt.

Związek między a a f przy hamowaniu tylko tylnym kołem (równanie (8) lub równoważne, np (27)) .... 2 pkt.

Związek między a a drogą hamowania l_1 (równanie (11) lub równoważne) – tylko jeśli jest wykorzystywany w rozwiązaniu .... 1 pkt.

Wyznaczenie współczynnika tarcia f na podstawie drogi hamowania w przypadku hamowania tylko tylnym kołem (równanie (12) lub równoważne) .... 1 pkt.

Minimalna droga hamowania l_2 wyrażona przez współczynnik tarcia (równanie (13) lub równoważne) bez uwzględniania warunku nieodrywania się tylnego koła .... 1 pkt.

Maksymalne $-a$ niepowodujące oderwania się tylnego koła (równanie (16) lub równoważne) .... 1 pkt.

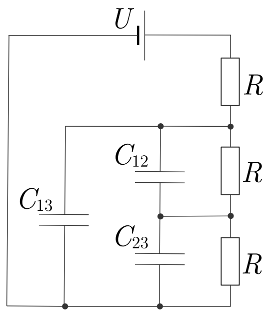
Końcowe wyniki (równania (21) oraz (19) wraz ze stwierdzeniem, że właściwe rozwiązanie odpowiada maksimum z nich, lub wraz z warunkami wyboru odpowiedniej sytuacji (18), (20) lub równoważnymi) .... 1 pkt.
Wyniki liczbowe (22) oraz (23) .... 1 pkt.

Uwaga do punktacji:

Jeśli uczestnik/uczestniczka błędnie rozważył przypadek hamowania tylnym kołem (np. siły nacisku wyznaczył z rozważania przypadku statycznego), to nie dostaje punktów za 1., 2., 4., 7., 8. , ale nadal może dostać punkty za 3., 5. oraz 6.

Rozwiązanie zadania 2

Płytki są równoważne układowi trzech kondensatorów (patrz rysunek)



o pojemnościach

$$C_{12} = \varepsilon_0 \frac{b \cdot (a - a/3)}{d} = \frac{2}{3}C, \tag{28}$$

$$C_{23} = \varepsilon_0 \frac{b \cdot (a - 2a/3)}{d} = \frac{1}{3}C, \tag{29}$$

$$C_{13} = \varepsilon_0 \frac{b \cdot a/3}{2d} = \frac{1}{6}C, \tag{30}$$

gdzie $C = \varepsilon_0 ab/d$. Zauważmy, że ponieważ $d \ll a$, b, pominęliśmy efekty brzegowe – każdy z kondensatorów odpowiada „pokrywającym się” się częściom odpowiednich dwóch płytek. „Wystające” części płytek w rozważanym przybliżeniu nie mają znaczenia.

Oporniki są połączone szeregowo, zatem płynie przez nie prąd o natężeniu $I = U/(3R)$.

W takiej sytuacji napięcie na poszczególnych kondensatorach wynosi

$$U_{12} = IR = \frac{1}{3}U, \tag{31}$$

$$U_{23} = IR = \frac{1}{3}U, \tag{32}$$

$$U_{13} = U_{12} + U_{23} = \frac{2}{3}U, \tag{33}$$

a ładunek na poszczególnych płytkach jest równy

$$Q_1 = C_{13}U_{13} + C_{12}U_{12} = \frac{1}{3}Q, \tag{34}$$

$$Q_2 = C_{23}U_{23} - C_{12}U_{12} = -\frac{1}{9}Q, \tag{35}$$

$$Q_3 = -C_{13}U_{13} - C_{23}U_{23} = -\frac{2}{9}Q, \tag{36}$$

gdzie $Q = CU$. Zatem w jawnej postaci

$$Q_1 = \frac{1}{3}\frac{\varepsilon_0 ab}{d}U, \tag{37}$$

$$Q_2 = C_{23}U_{23} - C_{12}U_{12} = -\frac{1}{9}\frac{\varepsilon_0 ab}{d}U, \tag{38}$$

$$Q_3 = -C_{13}U_{13} - C_{23}U_{23} = -\frac{2}{9}\frac{\varepsilon_0 ab}{d}U. \tag{39}$$

Alternatywne rozwiązanie zadania 2(skorzystanie z prawa Gaussa)

Napięcie pomiędzy odpowiednimi parami płytek jest równe

$$U_{12} = IR = \frac{1}{3}U, \tag{40}$$

$$U_{23} = IR = \frac{1}{3}U, \tag{41}$$

$$U_{13} = I \cdot (2R) = \frac{2}{3}U, \tag{42}$$

gdzie $I = U/(3R)$ jest natężeniem prądu płynącego przez każdy z oporników.

Zauważmy, że układ można podzielić na trzy istotne obszary:

Obszar 13, w którym jedna trzecia płytki 1 znajduje się nad jedną trzecią płytki 3 i nie ma innych płytek pomiędzy nimi. Odległość między płytkami wynosi $2d$ i jest znacznie mniejsza od rozmiarów poprzecznych odpowiednich części płytek.

Obszar 12, w którym dwie trzecie płytki 1 znajduje się nad dwoma trzecimi płytki 2. Odległość między płytkami wynosi d i jest znacznie mniejsza od rozmiarów poprzecznych odpowiednich części płytek.

Obszar 23, w którym jedna trzecia płytki 2 znajduje się nad jedną trzecią płytki 3. Odległość między płytkami wynosi d i jest znacznie mniejsza od rozmiarów poprzecznych odpowiednich części płytek.

W każdym z rozważanych obszarów odległość między płytkami jest znacznie mniejsza od rozmiarów poprzecznych odpowiednich części płytek, zatem można taki obszar traktować jak wnętrze kondensatora płaskiego. W kondensatorze płaskim pole elektryczne jest jednorodne i prostopadłe do okładek, zatem wartość natężenia tego w każdym z obszarów wynosi

$$E_{12} = \frac{U_{12}}{d} = \frac{1}{3}\frac{U}{d}, \tag{43}$$

$$E_{23} = \frac{U_{23}}{d} = \frac{1}{3}\frac{U}{d}, \tag{44}$$

$$E_{13} = \frac{U_{13}}{2d} = \frac{1}{3}\frac{U}{d}. \tag{45}$$

Podobnie jak dla zwykłego kondensatora, pole elektryczne nad płytką 1 oraz pod płytką 3 jest równe zeru. Podobnie zerowe jest pole elektryczne nad wystającą częścią płytki 3 i pod wystającą częścią płytki 1.

Skorzystamy teraz z prawa Gaussa mówiącego, że (w próżni) całkowity strumień pola elektrycznego przechodzącego przez zamkniętą powierzchnię jest równy całkowitemu ładunkowi elektrycznymi w obszarze ograniczonym tą powierzchnią podzielonemu przez ε_0.

Otaczając każdą z płytek powierzchnią prostopadłościanu zawierającego tę płytkę, otrzymamy ładunki na poszczególnych płytkach

$$Q_1 = \varepsilon_0 \left(E_{13} \cdot \frac{a}{3} b + E_{12} \cdot \frac{2a}{3} b \right) = \varepsilon_0 \frac{1}{3} \frac{U}{d} ab, \tag{46}$$

$$Q_2 = \varepsilon_0 \left(-E_{12} \cdot \frac{2a}{3} b + E_{23} \cdot \frac{a}{3} b \right) = -\varepsilon_0 \frac{1}{9} \frac{U}{d} ab, \tag{47}$$

$$Q_3 = \varepsilon_0 \left(-E_{13} \cdot \frac{a}{3} b - E_{23} \cdot \frac{a}{3} b \right) = \varepsilon_0 \frac{2}{9} \frac{U}{d} ab. \tag{48}$$

Są to te same wyniki, co wyniki otrzymane w poprzedniej wersji rozwiązania.

Punktacja zadania 2.

Schemat odpowiadający układowi równoważnemu .... 3 pkt.
Pojemności kondensatorów (wzory (28) – (30); 1 pkt za każdą pojemność) .... 3 pkt.
Napięcia na kondensatorach (wzory (31) – (33)) .... 1 pkt.
Ładunki na płytkach (wzory (37) – (39); 1 pkt za każdy ładunek) .... 3 pkt.

Alternatywna punktacja zadania 2

Napięcia pomiędzy poszczególnymi płytkami (wzory (40) – (42)) .... 1 pkt.
Podział układu na obszary, z których każdy może być traktowany jako wnętrze kondensatora płaskiego (lub równoważne podejście pod warunkiem wykorzystania go w rozwiązaniu) .... 3 pkt.
Natężenie pola elektrycznego w każdym z obszarów, pod warunkiem wykorzystania go w rozwiązaniu (wzory (43) – (45) oraz określenie jak jest skierowane to pole; 1 pkt za każdy z obszarów) .... 3 pkt.
Wyznaczenie ładunków na płytkach przy wykorzystaniu prawa Gaussa (wzory (46) – (48); 1 pkt za każdy ładunek) .... 3 pkt.

Rozwiązanie zadania 3

Przyjmijmy, że w stanie początkowym z pkt. 1 cyklu mamy w sumie n moli gazu, z czego $x \cdot n$ moli to metan; (zatem $(1-x) \cdot n/5$ moli to tlen). Jeśli cały metan ulega spaleniu (w przeciwnym razie część metanu ulegnie zmarnowaniu), tzn. gdy

$$x \leqslant ((1-x)/5)/2, \tag{49}$$

to w rozważanej reakcji wytworzy się ciepło

$$Q = xnQ_{\mathrm{s}}. \tag{50}$$

Uwzględniając że w rozpatrywanej reakcji liczba moli gazu nie ulega zmianie, oraz że energia wewnętrzna gazu doskonałego o temperaturze T jest równa nC_VT, temperatura gazu po wybuchu będzie wynosić

$$T_1 = \frac{Q}{nC_V} + T_0 = \tag{51}$$

$$= x\frac{Q_\mathrm{s}}{C_V} + T_0, \tag{52}$$

a ciśnienie

$$p_1 = \frac{T_1}{T_0}p_0, \tag{53}$$

przy czym skorzystaliśmy z równania stanu gazu doskonałego $pV = nRT$. Korzystając z równania stanu gazu doskonałego możemy równanie adiabaty przekształcić do postaci

$$p^{-R/(C_V+R)}T = \text{const.} \tag{54}$$

Po rozprężeniu ciśnienie gazu ma być równe ciśnieniu atmosferycznemu p_0, zatem temperatura gazu po rozprężeniu wynosi

$$T_2 = T_1\left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{R/(C_V+R)} = \tag{55}$$

$$= T_1\left(\frac{T_0}{T_1}\right)^{R/(C_V+R)}. \tag{56}$$

Z zasady zachowania energii (I zasady termodynamiki) wynika, że praca uzyskana w jednym cyklu, czyli w naszej sytuacji przy rozprężaniu adiabatycznym, wynosi

$$W = nC_V\left(T_1 - T_2\right) - p_0\left(V_2 - V_1\right), \tag{57}$$

gdzie $nC_V\left(T_1 - T_2\right)$ to zmiana energii wewnętrznej w trakcie rozprężania, natomiast $p_0\left(V_2 - V_1\right)$ to praca jaką rozprężający się gaz musi wykonać, aby sprężyć otaczające powietrze. V_2 to objętość gazu po rozprężeniu, V_1 to objętość gazu przed rozprężeniem (równa objętości gazu przed wybuchem V_0). Z równania stanu gazu doskonałego mamy

$$p_0V_2 - p_0V_1 = nRT_2 - nRT_0,$$

gdzie wykorzystaliśmy, że ciśnienie po rozprężeniu jest równe p_0, a objętość tuż po wybuchu jest równa objętości gazu przed wybuchem. Uwzględniając powyższe równanie otrzymamy

$$W = nC_V\left(T_1 - T_2\right) - nR\left(T_2 - T_0\right) = \tag{58}$$

$$= n\left(C_V + R\right)\left(T_1 - T_2\right) - nR\left(T_1 - T_0\right). \tag{59}$$

Zatem teoretyczna sprawność naszego silnika jest równa

$$\eta = \frac{W}{Q} = \tag{60}$$

$$= \frac{\left(C_V + R\right)\left(T_1 - T_2\right) - R\left(T_1 - T_0\right)}{C_V\left(T_1 - T_0\right)} = \tag{61}$$

$$= \frac{\left(C_V + R\right)\left(1 - \left(\frac{T_0}{T_1}\right)^{R/(C_V+R)}\right) - R\left(1 - \frac{T_0}{T_1}\right)}{C_V\left(1 - \frac{T_0}{T_1}\right).}. \tag{62}$$

Widać, że sprawność rośnie wraz ze wzrostem T_1 (co jest oczekiwane), zatem sprawność będzie największa dla maksymalnego dopuszczalnego x.

Z nierówności (49) to maksymalne x spełnia równanie

$$x = \frac{1-x}{10},$$

a zatem otrzymamy

$$x = \frac{1}{11}. \tag{63}$$

Uwzględniając to, maksymalna sprawność jest równa

$$\eta_{\max} = \frac{(C_V+R)\left(1-\left(\frac{T_0}{T_0+xQ_s/C_V}\right)^{R/(C_V+R)}\right) - R\left(1-\frac{T_0}{T_0+xQ_s/C_V}\right)}{C_V\left(1-\frac{T_0}{T_0+xQ_s/C_V}\right)} = \tag{64}$$

$$= \frac{(C_V+R)\left(1-\left(\frac{1}{1+Q_s/(11T_0C_V)}\right)^{R/(C_V+R)}\right) - R\left(1-\frac{1}{1+Q_s/(11T_0C_V)}\right)}{C_V\left(1-\frac{1}{1+Q_s/(11T_0C_V)}\right)}. \tag{65}$$

Dla podanych w treści zadania wartości liczbowych otrzymamy

$$\eta = 40\ \%, \tag{66}$$

przy czym $T_1 = 4200$ K, $T_2 = 2000$ K. Zauważmy że jest to wynik zawyżony z wielu powodów: silnik się grzeje i oddaje ciepło do otoczenia w trakcie rozprężania, w trakcie rozprężania niezupełnie jest spełnione równanie adiabaty, C_V zależy od składu mieszanki i rośnie wraz z temperaturą (w dużych temperaturach uaktywnią się dodatkowe stopnie swobody, np. związane z drganiami atomów wchodzących w skład danej cząsteczki).

Uwaga:

Pracę użyteczną W możemy też wyznaczyć korzystając z tego, że dla małych przyrostów

$$\Delta W = (p - p_0)\,\Delta V, \tag{67}$$

gdzie $p = p_1\,(V_0/V)^{(C_V+R)/C_V}$. Wyrażenie $p - p_0$ uwzględnia, że z drugiej strony tłoka działa ciśnienie atmosferyczne. Całkując to równanie otrzymamy

$$\begin{aligned}
W &= \int_{V_0}^{V_2} p_1\left(\frac{V_0}{V}\right)^{(C_V+R)/C_V} \mathrm{d}V - p_0\,(V_2-V_0) = \\
&= \frac{1}{1-(C_V+R)/C_V}\,p_1\left(V_2\left(\frac{V_0}{V_2}\right)^{(C_V+R)/C_V} - V_0\right) - p_0\,(V_2-V_0) = \\
&= -\frac{C_V}{R}\,p_1\left(V_2\frac{p_2}{p_1} - V_0\right) - p_0\,(V_2-V_0) = \\
&= -C_V n\,(T_2-T_1) - p_0\,(V_2-V_0)\,,
\end{aligned}$$

co jest równoważne równaniu (57).

Punktacja zadania 3.

Temperatura gazu po wybuchu w zależności od liczby moli metanu (równanie (52) lub równoważne) . . . . 1 pkt.
Temperatura gazu po rozprężeniu (równanie (56) lub równoważne) . . . . 2 pkt.
Wyrażenie na pracę użyteczną wykonaną w trakcie cyklu (równanie (57) lub równoważne) . . . . 2 pkt.
Sprawność cyklu wyrażona przez temperatury na poszczególnych etapach cyklu (równanie (61) lub równoważne), wraz z uzasadnieniem/wyprowadzeniem . . . . 2 pkt.
Ustalenie dla jakiego ułamka molowego metanu wystąpi największa sprawność (wyrażenie (63) lub równoważne) . . . . 1 pkt.
Jawny wzór na maksymalną sprawność rozważanego cyklu (równanie (65) lub równoważne) . . . . 1 pkt.
Liczbowa wartość maksymalnej sprawności cyklu (wyrażenie (66)) . . . . 1 pkt.

Uwagi do punktacji:

W punkcie czwartym można wypisać sprawność wyrażoną przez inne parametry niż temperatury, pod warunkiem, że te parametry zostały jawnie wyznaczone.

W punkcie piątym nie jest niezbędne skorzystanie z jawnego wyrażenia na sprawność; oczekujemy (przez porównanie z cyklem Carnota), że największa sprawność będzie wtedy, gdy temperatura po wybuchu będzie największa, a to nastąpi, gdy najwięcej ciepła wydzieli się w reakcji.