

LXXII OLIMPIADA FIZYCZNA

ZAWODY III STOPNIA

CZEŚĆ DOŚWIADCZALNA, 15.04.2023

Za zadanie można otrzymać maksymalnie 40 punktów.

Masz do dyspozycji:

- dwie szklane probówki,
- pręt teflonowy,
- nić,
- jednorodne kulki stalowe o średnicach 6 mm, 7 mm, 8 mm, 10 mm oraz 16 mm,
- dwa prostokątne drewniane klocki,
- papier milimetrowy,
- taśmę klejącą,
- nożyczki.

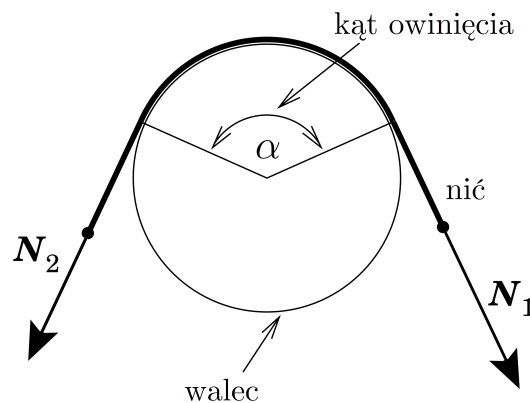
Wyznacz współczynnik tarcia statycznego:

- nici o teflon,
- nici o szkło.

Przyjmij, że średnice kulek są znane dokładnie.

Uwaga 1: Gdy wiotka nić spoczywa owinięta wokół walca o kąt owinięcia α , a współczynnik tarcia statycznego między nicią a walcem wynosi μ , wtedy niezerowe siły naciągu nici N_1 i N_2 po obu stronach mogą przyjmować dowolne wartości ograniczone nierównościami: $e^{-\mu\alpha} \leq N_1/N_2 \leq e^{\mu\alpha}$, gdzie $e = 2,718\dots$ jest podstawą logarytmu naturalnego, a kąt α jest wyrażony w radianach.

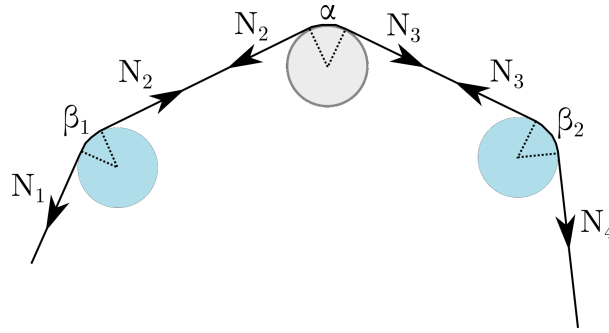
Uwaga 2: Zadbaj o czystość probówek oraz pręta teflonowego. Możesz w tym celu wykorzystać chusteczki higieniczne, które otrzymałeś. Upewnij się również, że fragment nici, którego używasz jest czysty. W przypadku zabrudzenia, użyj czystego kawałka nici odwiniętego ze szpuli.



Rozwiązanie

Część teoretyczna

Pomysł rozwiązania polega na przymocowaniu dwóch różnych kulek stalowych do dwóch końców nici oraz zawieszeniu ich na układzie złożonym z probówek szklanych oraz teflonowego pręta w taki sposób, że kąt owinięcia nici wokół pręta teflonowego wynosi α , natomiast kąty owinięcia nici wokół szklanych probówek wynoszą β_1 oraz β_2 (patrz: Rys. 2).



Rys. 1. Siły działające na różne części nici owiniętej wokół probówek i pręta teflonowego

Oznaczmy współczynnik tarcia statycznego nici o szkło przez μ_s , a nici o teflon przez μ_t . Rozważmy sytuację w której stosunki sił naciągu nici przy każdym z walców są największe możliwe (na granicy poślizgu), oraz że $N_1 > N_2 > N_3 > N_4$. Zachodzą wtedy równości:

$$\frac{N_1}{N_2} = e^{\mu_s \beta_1}, \quad (1)$$

$$\frac{N_2}{N_3} = e^{\mu_t \alpha} \quad (2)$$

oraz

$$\frac{N_3}{N_4} = e^{\mu_s \beta_2}. \quad (3)$$

Mnożąc równania (1-3) stronami otrzymujemy

$$\frac{N_1}{N_4} = e^{\mu_s \beta_1} \cdot e^{\mu_t \alpha} \cdot e^{\mu_s \beta_2} = e^{\mu_s \beta_1 + \mu_t \alpha + \mu_s \beta_2} = e^{\mu_s (\beta_1 + \beta_2) + \mu_t \alpha}. \quad (4)$$

W sytuacji, w której siły naciągu N_1 oraz N_4 wynikają z ciężarów wiszących kulek o masach m_1 oraz m_2 , możemy stosunek tych sił wyrazić przez stosunek mas zawieszonych kulek, a zatem przez stosunek trzecich potęg ich średnic:

$$\frac{N_1}{N_4} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{d_1^3}{d_2^3}. \quad (5)$$

Jeśli $N_1 > N_4$ to średnice kulek we wzorze 5 spełniają warunek $d_1 > d_2$. Podstawiając równanie (5) do równania (4):

$$\frac{d_1^3}{d_2^3} = e^{\mu_s (\beta_1 + \beta_2) + \mu_t \alpha}, \quad (6)$$

a następnie biorąc logarytm naturalny obu stron otrzymujemy:

$$3 \cdot \ln \frac{d_1}{d_2} = \mu_s (\beta_1 + \beta_2) + \mu_t \alpha. \quad (7)$$

Równanie (7) można wykorzystać w układzie doświadczalnym, w którym kąty β_1 oraz β_2 pozostają stałe, natomiast kąt nawinięcia α jest dobierany eksperymentalnie taki, aby zachować warunek braku poślizgu nici, ale żeby dla każdego mniejszego kąta nawinięcia poślizg już występował. Równanie (7) można zapisać w postaci równania prostej

$$y = B + A \cdot x, \quad (8)$$

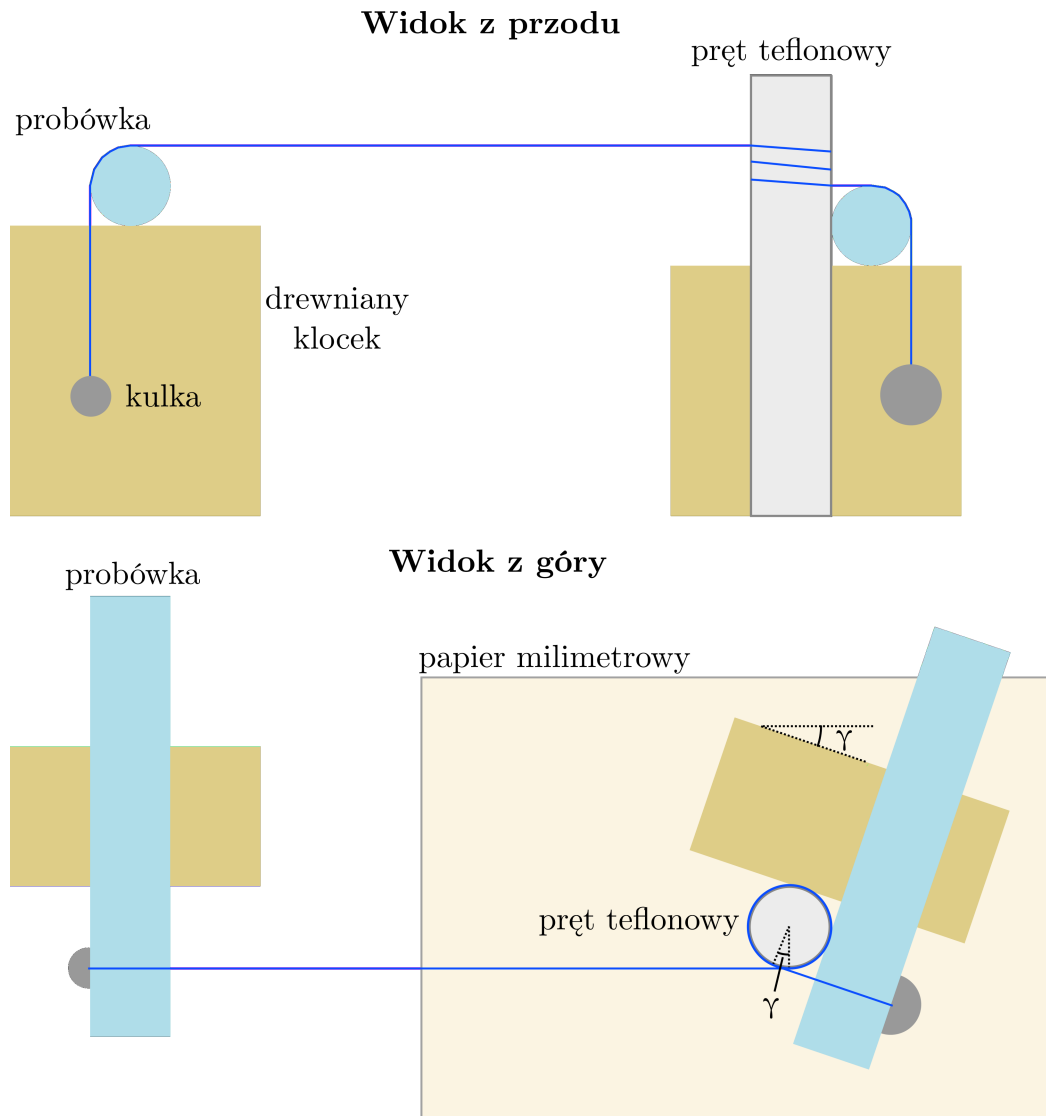
gdzie $y = \ln \frac{m_1}{m_2} = 3 \ln \frac{d_1}{d_2}$, $A = \mu_t$, $x = \alpha$ oraz $B = \mu_s(\beta_1 + \beta_2)$. Znajdując eksperymentalnie kąty α dla różnych par kulek można obliczyć wartości x oraz y oraz nanieść je na wykres. Dopasowując prostą do naniesionych punktów można odczytać wartości parametrów A oraz B oraz wyznaczyć szukane wartości współczynników tarcia statycznego nici o szkło oraz o teflon:

$$\mu_s = \frac{B}{\beta_1 + \beta_2}, \quad (9)$$

$$\mu_t = A. \quad (10)$$

Część doświadczalna

Zastawiono układ doświadczalny przedstawiony na Rys. 3. Probówki przyklejono taśmą klejącą poziomo na górnych powierzchniach drewnianych klocek. Klocki ustawiono na różnych ściankach, aby leżąc miały nieznacznie różne wysokości. Do niższego klocka przyklejono pręt teflonowy w taki sposób, aby był ustawiony pionowo, przylegał do ściany klocka oraz stykał się z probówką. Przygotowano fragment nici o długości około 60 cm i do obu jego końców przymocowano niewielkimi fragmentami taśmy klejącej pary różnych kulek. Nić z kulkami zawieszano na probówkach oraz owijano wokół pręta teflonowego w sposób przedstawiony na Rys. 3.



Rys. 2. Układ doświadczalny

Dzięki ustawieniu probówek na różnych wysokościach możliwe było nawinięcie nici wokół pręta teflonowego w taki sposób, aby różne części nici nie stykały się ze sobą. Obracając klocek z probówką i prętem teflonowym wokół osi pionowej można ustalić dowolny kąt α owinięcia nici wokół pręta teflonowego.

Aby zmierzyć kąt owinięcia α , upewniano się patrząc z góry, że nić jest równoległa do linii papieru milimetrowego. Następnie, określano długopisem na papierze milimetrowym linię wzdłuż krawędzi podstawy klocka drewnianego oraz odczytywano kąt γ pomiędzy narysowaną linią a

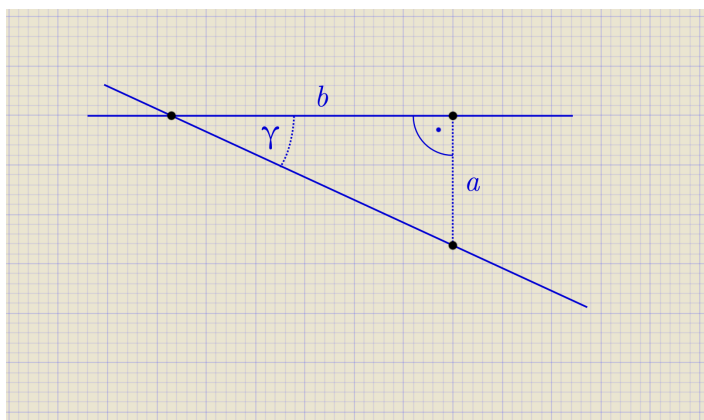
poziomymi liniami papieru milimetrowego (patrz: Rys. 3). Korzystając z tożsamości trygonometrycznych między kątem γ a kątem utworzonym między osią walca a punktami styku prostych odcinków nici z prętem teflonowym obliczano kąt owinięcia α . Geometria tej tożsamości była różna dla różnych kątów owinięcia. Na przykład, w sytuacji przedstawionej na Rys. 3 kąt α wynosi: $\alpha = 2\pi - \gamma$.

Kąt γ odczytywano przez wyznaczenie jego tangensa na podstawie linii narysowanych na papierze milimetrowym (Rys. 4):

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{a}{b}, \quad (11)$$

czyli

$$\gamma = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{a}{b}. \quad (12)$$



Rys. 3. Sposób odczytu kąta γ

W proponowanym układzie doświadczalnym kąty owinięcia nici o szklane próbówki wynoszą

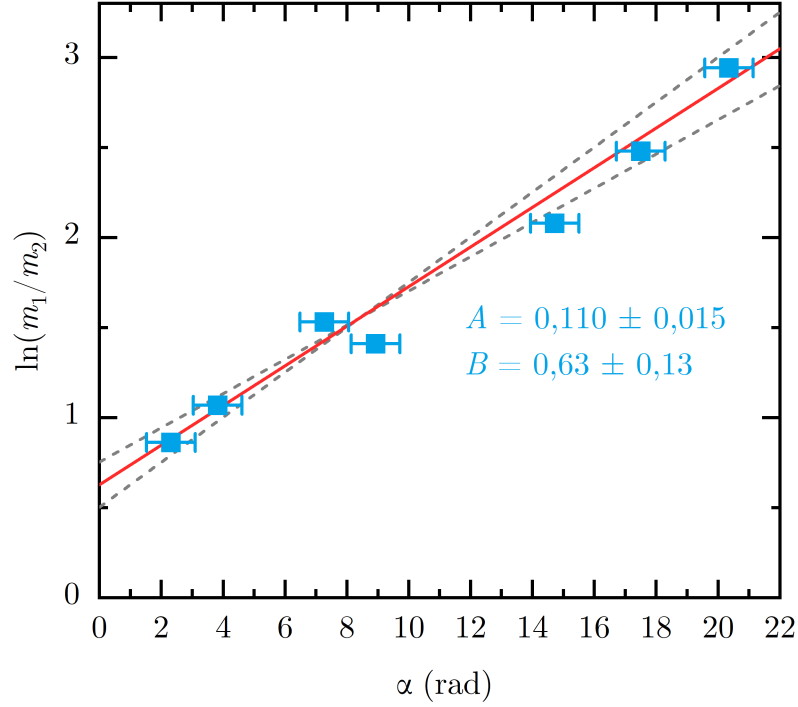
$$\beta_1 = \beta_2 = \frac{\pi}{2}, \quad (13)$$

Równanie (9) pozwalające na obliczenie współczynnika tarcia szkła na podstawie wolnego parametru dopasowania prostej przybiera wtedy postać:

$$\mu_s = \frac{B}{\pi}. \quad (14)$$

Pomiar granicznego kąta nawinięcia α w zaproponowanym układzie doświadczalnym wykonano dla wszystkich par kulek. W przypadku par kulek o średnicach 6 mm i 7 mm, 7 mm i 8 mm oraz 8 mm i 10 mm tarcie o same próbówki było wystarczające do powstrzymania ruchu układu, zatem nie istniał kąt graniczny α . Przyjęto, że układ pozostaje w spoczynku, jeśli przez kilka sekund nie wystąpiło widoczne przesunięcie nici. Dla kątów nawinięcia nieznacznie mniejszych od kąta granicznego widoczny był powolny, jednostajny ruch. Kąt graniczny był trudny do precyzyjnego wyznaczenia oraz zależał od sposobu ułożenia nici na próbówkach i pręcie teflonowym, zatem przyjęto, że niepewność wyznaczenia kąta α wynosi 45° , czyli $\pi/4$. Zgodnie ze wskazówką podaną w treści zadania przyjęto, że średnice kulek, a zatem i stosunki ich mas są znane dokładnie.

Wyniki pomiarów przedstawiono na Rys. 5. Na osi poziomej naniesiono zmierzone wartości kąta granicznego α , a na osi pionowej logarytm stosunku mas kulek zawieszonych na obu końcach



Rys. 4. Wynik eksperymentu wraz z dopasowaniem prostych

nici, zgodnie z definicjami równania (8). Do danych pomiarowych dopasowano prostą najlepszego dopasowania oraz skrajne proste obejmujące większość punktów pomiarowych, a następnie odczytano wartości parametru kierunkowego A oraz wolnego parametru dopasowania B . Na podstawie równań oraz (10) oraz (14) wyznaczono współczynniki tarcia statycznego nici o szkło μ_s oraz nici o teflon μ_t :

$$\mu_s = 0,20 \pm 0,04. \quad (15)$$

$$\mu_t = 0,110 \pm 0,015. \quad (16)$$

Niepewność określenia wartości μ_s oraz μ_t obliczono jako połowę różnicy między wartościami obliczonymi na podstawie parametrów dopasowania skrajnych prostych.

Dodatek

Współczynnik tarcia statycznego nici o szkło można również wyznaczyć nie korzystając z wolnego parametru dopasowania, ale w układzie, w którym jedna z probówek jest zamieniona miejscami z prętem teflonowym. Równanie (7) przyjmie wtedy postać

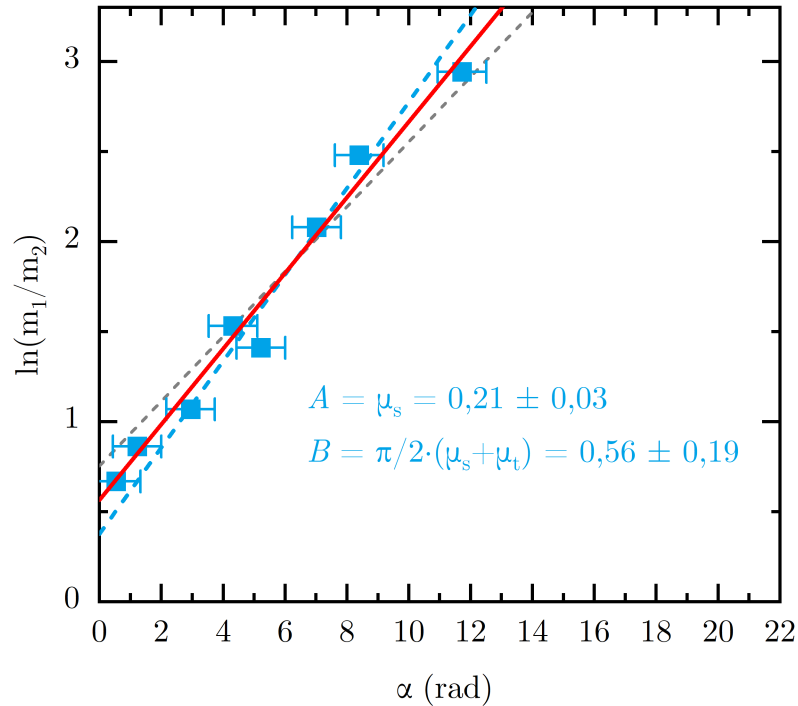
$$3 \cdot \ln \frac{d_1}{d_2} = \frac{\pi}{2}(\mu_s + \mu_t) + \mu_s \alpha. \quad (17)$$

Wyniki pomiarów przeprowadzonych w takiej konfiguracji przedstawione są na Rys. 6. Na podstawie dopasowania prostych można obliczyć wartość współczynnika tarcia statycznego nici o szkło μ_s :

$$\mu_s = 0,21 \pm 0,03, \quad (18)$$

natomiast współczynnik tarcia o teflon wyznaczony tą metodą jest obarczony bardzo dużą niepewnością ze względu na niewielką siłę tarcia działającą na nić na tak krótkim odcinku owinięcia:

$$\mu_t = 0,15 \pm 0,15. \quad (19)$$



Rys. 5. Wynik eksperymentu wraz z dopasowaniem prostych w podejściu alternatywnym, czyli z zamienionymi miejscami prętem teflonowym oraz jedną z próbek

Komentarz od sprawdzających

Możliwych konfiguracji układu doświadczalnego pozwalających na wyznaczenie współczynników tarcia μ_s i μ_t jest wiele. Najwyżej punktowane były pomysły, w których możliwa była kontrola w sposób ciągły jednej z wielkości: kąta owinięcia nici lub stosunku sił naciągu nici. Ważne było również zbadanie dużych kątów nawinięć ze względu na niewielką wartość współczynnika tarcia nici o teflon.

Punktacja

- Pomysł na obliczenie współczynników tarcia μ_s i μ_t (wzory (7-8) lub równoważne) .. 3 pkt.
- Pomysł na układ doświadczalny pozwalający na pomiar współczynników μ_s i μ_t 5 pkt.
- Opis układu pomiarowego oraz procedury pomiaru 2 pkt.
- Wykonanie pomiarów umożliwiających wyznaczenie współczynników tarcia μ_s i μ_t .. 2 pkt.
- Wykonanie pomiarów dla co najmniej pięciu różnych par kulek 1 pkt.
- Wyznaczenie współczynników tarcia statycznego nici o każdy z materiałów 1 pkt.
- Wykres lub równoważna analiza pomiarów 1 pkt.
- Otrzymanie wyników μ_s w zakresie 0,165-0,275 oraz μ_t w zakresie 0,085-0,145 3 pkt.
- Ocena niepewności otrzymanych wyników 2 pkt.