LXXII OLIMPIADA FIZYCZNA

ZAWODY II STOPNIA

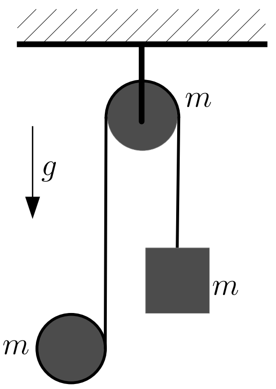
CZĘŚĆ TEORETYCZNA, 15.01.2023

Za każde zadanie można otrzymać maksymalnie 20 punktów.

Na końcu znajdują się zależności, które mogą być przydatne przy rozwiązywaniu zadań.

Zadanie 1

Przez bloczek będący jednorodnym walcem o promieniu r przerzucona jest wiotka, nierozciągliwa i nieważka nić (patrz rysunek). Do jednego końca tej nici przywiązany jest ciężarek, zaś drugi koniec jest nawinięty na jednorodny walec o tym samym promieniu co bloczek. Każdy z walców oraz ciężarek ma taką samą masę m. Nić nie ślizga się po żadnym z walców.

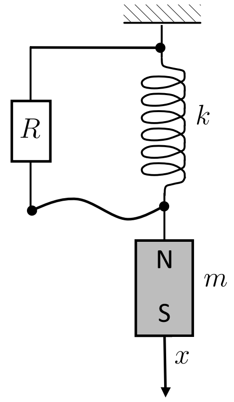


Przyjmujemy, że osie walców pozostają poziome (i prostopadłe do płaszczyzny rysunku). Fragmenty nici po obu stronach bloczka są stale pionowe. Bloczek obraca się bez tarcia. Zaniedbaj opór powietrza. Moment bezwładności każdego z walców względem jego osi jest równy $mr^2/2$.

Wyznacz przyspieszenie ciężarka.

Zadanie 2

Na nieważkiej sprężynie o stałej sprężystości k wisi magnes o masie m. Sprężyna jest wykonana z cienkiego drutu tworzącego zwojnicę. Do końców sprężyny dołączony jest opornik o dużym oporze R (patrz rysunek), jedna z końcówek jest dołączona przez giętki przewód.



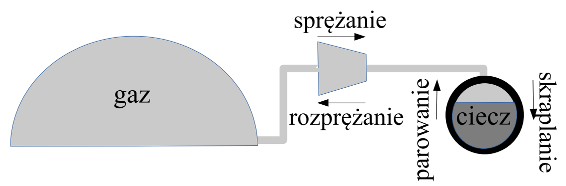
Magnes odchylono w pionie od położenia równowagi i puszczono. Całkowity strumień pola magnesu przechodzący przez zwojnicę (suma strumieni przechodzących przez poszczególne zwoje) w dobrym przybliżeniu zależy od wychylenia magnesu x od położenia równowagi zgodnie ze wzorem

$$\Phi = \Phi_0(1 + \alpha x)$$

gdzie α oraz Φ_0 są znanymi stałymi.

Oblicz stosunek dwóch kolejnych maksymalnych odchyleń ciężarka (odpowiadających najwyższemu/najniższemu położeniu) od położenia równowagi, zakładając, że straty energii wynikają wyłącznie z przepływu prądu przez opornik. Założenie o dużym R oznacza, że występuje słabe tłumienie drgań (szukany stosunek jest bliski 1) i że można pominąć pole magnetyczne wytwarzane przez płynący prąd w porównaniu z polem magnetycznym magnesu.

Zadanie 3



Schematyczne przedstawienie magazynowania energii (sprężanie, skraplanie) oraz procesu odwrotnego pracy (parowanie, rozprężanie). Woda wykorzystywana do utrzymania stałej temperatury we wszystkich procesach nie jest pokazana.

Jednym z pomysłów na magazynowanie energii elektrycznej pochodzącej ze źródeł odnawialnych jest wykorzystanie CO_2 i jego przemiany ze stanu gazowego do stanu ciekłego. Początkowo gazowy CO_2 znajduje się w odpowiedniej wielkości balonach, a jego ciśnienie jest równe ciśnieniu atmosferycznemu p_0 (w praktyce musi być nieco większe od p_0). Ten gaz jest sprężany do ciśnienia p_1, a przy dalszym zmniejszaniu objętości ulega skropleniu przy tym ciśnieniu. Temperatura skraplania CO_2 pod ciśnieniem p_1 wynosi T_0. W tych procesach jest wykorzystywana energia elektryczna ze źródeł odnawialnych. Skroplony CO_2 jest przechowywany w butlach.

W trakcie rozładowywania magazynu zachodzi proces odwrotny: ciecz odparowuje pod ciśnieniem p_1, a następnie CO_2 jest rozprężany od ciśnienia p_1 do ciśnienia p_0, wypełniając balon. Wykonana praca jest przy pomocy prądnicy zamieniana z powrotem na energię elektryczną.

Dodatkowo wykorzystywana jest woda, która odbiera lub dostarcza ciepło w opisanych procesach.

Przyjmij, że opisane powyżej procesy zachodzą w sposób odwracalny w temperaturze T_0 (do utrzymania tej stałej temperatury jest wykorzystywana woda). Gazowy CO_2 potraktuj jako gaz doskonały. Weź pod uwagę, że powłoka balonu jest wiotka i w trakcie sprężania CO_2 objętość ograniczona przez nią się zmniejsza. Objętość molowa ciekłego CO_2 w temperaturze T_0 wynosi v_m.

Wyznacz całkowitą objętość CO_2 (przy ciśnieniu p_0 i temperaturze T_0), która jest niezbędna, aby omawiana instalacja mogła zmagazynować energię elektryczną W. Podaj liczbową wartość tej objętości dla $W = 20$ kWh, $p_0 = 1 \cdot 10^5$ Pa, $p_1 = 57{,}3 \cdot 10^5$ Pa, $T_0 = 293$ K, $v_\mathrm{m} = 5{,}69 \cdot 10^{-5}$ m^3/mol.

Uniwersalna stała gazowa $R = 8{,}31$ J·mol^{-1}·K^{-1}.

Zależności, które mogą być przydatne

Jeśli $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = t^q$ to dla $q \neq -1$ mamy $x(t) = t^{q+1}/(q+1) +$ const, a dla $q = -1$ mamy $x(t) = \ln|t| + \mathrm{const}$;

Jeśli $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x^q$ to dla $q \neq 1$ mamy $x(t) = \sqrt[1-q]{(t + \mathrm{const})\,(1-q)}$, a dla $q = 1$ mamy $x(t) = \mathrm{const} \cdot \mathrm{e}^t$;

W powyższych wzorach ln oznacza logarytm naturalny, tzn. logarytm o podstawie e $= 2{,}718281...$, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ to pochodna funkcji $x(t)$ po t.

LXXII OLIMPIADA FIZYCZNA
ROZWIĄZANIA ZADAŃ ZAWODÓW II STOPNIA
CZĘŚĆ TEORETYCZNA

Rozwiązanie zadania 1

Oznaczmy przez x pionowe położenie zwisającego walca (dodatnie w dół), a przez y – pionowe położenie ciężarka (również dodatnie w dół), przez a_x oraz a_y odpowiednie przyspieszenia, a przez N_x, N_y – napięcie nici odpowiednio od strony zwisającego walca i od strony ciężaru, przez ϵ_b przyspieszenie kątowym ruchu obrotowego bloczka (dodatnie, gdy obraca się w prawo ze wzrastającą prędkością), a przez ϵ_x jest przyspieszenie kątowe ruchu obrotowego walca (dodatnie, gdy nić się rozwija ze wzrastającą prędkością)

Rozwiązanie A

Zapiszmy równania odpowiadające poszczególnym elementom układu.

Równanie ruchu ciężarka

$$ma_y = mg - N_y. \tag{1}$$

Równanie ruchu obrotowego bloczka

$$I\epsilon_\mathrm{b} = (N_y - N_x)\,r, \tag{2}$$

gdzie ϵ_x jest przyspieszeniem kątowym bloczka (dodatnim, gdy obraca się w prawo ze wzrastającą prędkością).

Równanie ruchu postępowego walca

$$ma_x = mg - N_x. \tag{3}$$

Równanie ruchu obrotowego walca

$$I\epsilon_x = N_x r. \tag{4}$$

Ponieważ nić jest nierozciągliwa, zachodzi dodatkowo związek

$$a_x - \epsilon_x r + a_y = 0. \tag{5}$$

Ponieważ nić nie ślizga sie po bloczku, mamy

$$\epsilon_\mathrm{b} r = a_y. \tag{6}$$

Przekształcamy powyższe wzory, aby uzyskać a_y.

Z równań (1), (22) oraz (25) otrzymujemy

$$m\left(a_x - a_y\right) = \frac{I}{r}\epsilon_{\rm b}. \tag{7}$$

Uwzględniając (6) z powyższego otrzymamy

$$a_x = \left(1 + \frac{I}{mr^2}\right) a_y. \tag{8}$$

Z (28) oraz (25), redukując N_x, mamy

$$\epsilon_x r = \frac{mr^2}{I}\left(g - a_x\right) \tag{9}$$

Z więzu (28), uwzględniając wyrażenia na a_x (8) oraz $\epsilon_x r$ (9), otrzymamy

$$\left(1 + \frac{I}{mr^2}\right) a_y - \frac{mr^2}{I}\left(g - \left(1 + \frac{I}{mr^2}\right) a_y\right) + a_y = 0. \tag{10}$$

Stąd otrzymamy

$$a_y = \frac{1}{3\frac{I}{mr^2} + \left(\frac{I}{mr^2}\right)^2 + 1} g \tag{11}$$

Podstawiając $I = mr^2/2$ dostaniemy szukane przyspieszenie

$$a_y = \frac{4}{11} g. \tag{12}$$

Rozwiązanie B

Zauważmy, że ze względu na brak poślizgu i boręc po uwagę II zasadę dynamiki dla ruchu obrotowego zapisaną w postaci $F = I/r^2$, układ ciężar + bloczek możemy traktować jako układ o efektywnej masie $m + I/r^2$, na który działa siła wypadkowa $mg - N_x$, tzn. obowiązuje równanie

$$\left(m + \frac{I}{r^2}\right) a_y = mg - N_x. \tag{13}$$

Równanie ruchu obrotowego walca ma postać

$$I\epsilon_x = N_x r. \tag{14}$$

Uwzględniając, że

$$a_x = -a_y + \epsilon_x r, \tag{15}$$

możemy równanie (14) przepisać w postaci

$$\frac{I}{r^2}\left(a_x + a_y\right) = N_x. \tag{16}$$

Równanie ruchu postępowego walca ma postać

$$ma_x = mg - N_x. \tag{17}$$

Z powyższych dwóch równań możemy napisać równanie wiążące N_x z a_y

$$\frac{I}{r^2}\left(g - \frac{N_x}{m} + a_y\right) = N_x,$$

a następnie wyrazić N_x przez a_y

$$N_x = \frac{g + a_y}{1 + \frac{I}{mr^2}}\frac{I}{r^2}. \tag{18}$$

Wstawiając do (13) dostajemy

$$\left(m + \frac{I}{r^2}\right)a_y = mg - \frac{g + a_y}{1 + \frac{I}{mr^2}}\frac{I}{r^2}, \tag{19}$$

a stąd otrzymujemy równanie (11), a następnie wynik końcowy (12).

Rozwiązanie C

Równanie ruchu ciężarka ma postać

$$ma_y = mg - N_y. \tag{20}$$

Stąd

$$N_y = m\left(g - a_y\right) \tag{21}$$

Na bloczek działa wypadkowy moment siły $\left(N_y - N_x\right)r$, stąd równanie ruchu obrotowego bloczka

$$I\epsilon_{\mathrm{b}} = \left(N_y - N_x\right)r, \tag{22}$$

gdzie ϵ_x jest przyspieszeniem kątowym bloczka.

Na podstawie powyższych równań i uwzględniając, że $\epsilon_{\mathrm{b}} = a_y/r$, możemy wyrazić N_x przez a_y

$$N_x = N_y - \frac{I\epsilon_{\mathrm{b}}}{r} = m\left(g - a_y\right) - \frac{I}{r^2}a_y = \tag{23}$$

$$= m\left(g - \left(1 + \frac{I}{mr^2}\right)a_y\right). \tag{24}$$

Równanie ruchu postępowego walca ma postać

$$ma_x = mg - N_x, \tag{25}$$

czyli uwzględniając wyrażenie na N_x

$$ma_x = mg - N_x = mg - m\left(g - \left(1 + \frac{I}{mr^2}\right)a_y\right) = \tag{26}$$

$$= m\left(1 + \frac{I}{mr^2}\right)a_y. \tag{27}$$

Równanie ruchu obrotowego walca jest następujące

$$I\epsilon_x = N_x r. \tag{28}$$

Ponieważ nić jest nierozciągliwa i nie ślizga się po bloczku, to przyspieszenie wyraża się przez przyspieszenie walca względem nici $a_x + a_y$ wzorem

$$\epsilon_x r = a_x + a_y. \tag{29}$$

Zatem dostajemy równanie

$$a_x + a_y = \epsilon_x r = \frac{r^2}{I} N_x \tag{30}$$

czyli po podstawieniu

$$\left(1 + \frac{I}{mr^2}\right) a_y + a_y = \frac{r^2}{I} m \left(g - \left(1 + \frac{I}{mr^2}\right) a_y\right). \tag{31}$$

Stąd znowu otrzymujemy równanie (11), a następnie wynik końcowy (12).

Punktacja zadania 1.

Pełny układ równań pozwalający na wyznaczenie a_y .... 6 pkt.

(po 1 pkt za każde z równań (1–6) lub równań równoważnych; np. dla rozwiązania B taki układ równań to równania: (13), (14), (15), (17) , przy czym (13) jest warte 3 pkt, bo uwzględnia równanie ruchu ciężarka, równanie ruchu obrotowego bloczka i związek przyspieszenia kątowego z liniowym).

Poprawne przekształcenia i otrzymanie jednego równania na szukane przyspieszenie (np. wzór ((10)) .... 3 pkt

(otrzymanie poprawnego układu dwóch równań na dwie niewiadome – 2 pkt; otrzymanie poprawnego układu trzech równań na trzy niewiadome – 1 pkt).

Poprawny wynik końcowy (wzór (12)) .... 1 pkt.

Zawodnik/zawodniczka może od samego początku dokonać podstawienia $I = mr^2/2$.

Rozwiązanie zadania 2

Przy pominięciu tłumienia zależność x od czasu t wyraża się wzorem $x(t) = A\cos\omega t$, gdzie $\omega = \sqrt{k/m}$, natomiast A jest amplitudą drgań. Tłumienie uwzględnimy przyjmując, że A zależy od czasu, ale zgodnie z treścią zadania założymy, że zmiany A w ciągu jednego okresu są małe, tzn. że szybkość zmian $A(t)$ jest mała w porównaniu z szybkością zmian $\cos\omega t$. Zależność $x(t)$ podstawiamy do podanej funkcji $\Phi(x)$ i obliczamy siłę elektromotoryczną indukcji wykorzystując prawo Faradaya

$$\mathcal{E} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\Phi_0 \alpha A\omega \sin\omega t. \tag{32}$$

Zgodnie z założeniem wolnej zmienności $A(t)$, przy wyznaczaniu $\mathcal{E}$ potraktowaliśmy A jak stałą. Moc wydzielona na oporniku jest równa

$$P = \frac{\mathcal{E}^2}{R} = \frac{(\varPhi_0 \alpha A \omega)^2 \sin^2 \omega t}{R}, \tag{33}$$

a strata energii w ciągu połowy okresu (między kolejnymi maksymalnymi wychyleniami)

$$\Delta E = \langle P \rangle \frac{T}{2} = \tag{34}$$

$$= \frac{\mathcal{E}^2}{4R} (\varPhi_0 \alpha A \omega)^2 T, \tag{35}$$

gdzie $\langle P \rangle$ jest średnią wartością mocy, a $T = 2\pi/\omega$ – okresem drgań. Z drugiej strony, energia drgań wyraża się wzorem

$$E = \frac{1}{2} k A^2, \tag{36}$$

czyli jej niewielka strata

$$\Delta E = k A \Delta A. \tag{37}$$

Z przyrównania wzorów na ΔE wyznaczamy

$$\frac{\Delta A}{A} = \frac{\pi \omega (\varPhi_0 \alpha)^2}{2Rk}. \tag{38}$$

Szukany stosunek kolejnych wychyleń to

$$\frac{A}{A - \Delta A} \approx 1 + \frac{\Delta A}{A} = 1 + \frac{\pi (\varPhi_0 \alpha)^2}{2R\sqrt{km}}. \tag{39}$$

Punktacja zadania 2.

Siła elektromotoryczna indukcji (wzór (32) lub równoważny) .... 2 pkt.
Chwilowa moc wydzielająca się na oporniku (wzór (33) lub równoważny) .... 2 pkt.
Strata energii w ciągu połowy okresu (wzór (35) lub równoważny) .... 2 pkt.
Strata energii drgań wyrażona przez zmianę amplitudy (wzór (37) lub równoważny) . 2 pkt.
Jawny wynik na szukany stosunek amplitud (wzór (39) lub równoważny) .... 2 pkt.

Rozwiązanie zadania 3

Praca wykonywana przy sprężeniu gazu od objętości V do objętości $V + \mathrm{d}V$ przy ciśnieniu p, jest równa

$$\mathrm{d}W_\mathrm{c} = -p\mathrm{d}V. \tag{40}$$

Korzystając z równania stanu gazu doskonałego $pV = nRT$ możemy to przepisać w postaci

$$\mathrm{d}W_\mathrm{c} = -\frac{nRT}{V}\mathrm{d}V, \tag{41}$$

lub równoważnie

$$\frac{\mathrm{d}W_\mathrm{c}}{\mathrm{d}V} = -nRT\frac{1}{V}. \tag{42}$$

Stąd, uwzględniając, że T jest stałe i równe T_0, otrzymamy

$$W_c = nRT_0 \ln \frac{V_0}{V_1}, \tag{43}$$

gdzie $V_1 = nRT_0/p_1$ jest objętością gazu po sprężeniu. W_c jest całkowitą pracą potrzebną do sprężenia gazu, część z tej pracy równą

$$p_0 \left(V_0 - V_1\right) \tag{44}$$

wykonuje ciśnienie atmosferyczne. Zatem praca W_1 jaką musi wykonać silnik elektryczny, aby sprężyć gaz do objętości V_1 wynosi

$$W_1 = nRT_0 \ln \frac{V_0}{V_1} - p_0 \left(V_0 - V_1\right) = nRT_0 \ln \frac{p_1}{p_0} - p_0 V_0 \left(1 - \frac{p_0}{p_1}\right) = p_0 V_0 \left(\ln \frac{p_1}{p_0} - 1 + \frac{p_0}{p_1}\right). \tag{45}$$

Powyżej skorzystaliśmy z równania stanu gazu doskonałego aby zamienić nRT_0 na p_0V_0.

Przy skraplaniu objętość CO_2 maleje od V_1 do nv_m (nv_m jest objętością skroplonego CO_2), zatem silnik dodatkowo musi wykonać pracę

$$W_2 = \left(p_1 - p_0\right) \left(V_1 - nv_\mathrm{m}\right). \tag{46}$$

Podobnie jak poprzednio $p_0 \left(V_1 - nv_\mathrm{m}\right)$ jest pracą wykonaną przez ciśnienie atmosferyczne.

Zatem całkowita praca wykonana przez silnik jest równa

$$W = nRT_0 \ln \frac{V_0}{V_1} - p_0 \left(V_0 - V_1\right) + \left(p_1 - p_0\right) \left(V_1 - nv_\mathrm{m}\right) = \tag{47}$$

$$= nRT_0 \ln \frac{V_0}{V_1} + p_1 \left(V_1 - nv_\mathrm{m}\right) - p_0 \left(V_0 - nv_\mathrm{m}\right). \tag{48}$$

Uwzględniając, że $n = \frac{p_0 V_0}{RT_0}$, oraz $V_0/V_1 = p_1/p_0$ otrzymamy

$$W = p_0 V_0 \ln \frac{p_1}{p_0} + p_0 V_0 - \frac{p_1 p_0 V_0 v_\mathrm{m}}{RT_0} - p_0 \left(V_0 - \frac{p_0 V_0 v_\mathrm{m}}{RT_0}\right) = \tag{49}$$

$$= p_0 V_0 \ln \frac{p_1}{p_0} - \left(p_1 - p_0\right) \frac{p_0 V_0 v_\mathrm{m}}{RT_0} = \tag{50}$$

$$= p_0 V_0 \left(\ln \frac{p_1}{p_0} - \frac{\left(p_1 - p_0\right) v_\mathrm{m}}{RT_0}\right). \tag{51}$$

Ponieważ proces jest odwracalny, praca którą wykona układ w cyklu odwrotnym, a przy założeniu idealnej sprawności prądnicy uzyskana energia elektryczna, jest równa tyle samo. Zatem

$$W = p_0 V_0 \left(\ln \frac{p_1}{p_0} - \frac{\left(p_1 - p_0\right) v_\mathrm{m}}{RT_0}\right). \tag{52}$$

Stąd

$$V_0 = \frac{W}{p_0 \left(\ln \frac{p_1}{p_0} - \frac{(p_1 - p_0) v_\mathrm{m}}{RT_0}\right)}. \tag{53}$$

Dla $W = 20$ kWh $= 20 \cdot 3600 \cdot 1000$ W, $p_0 = 1 \cdot 10^5$ Pa, $p_1 = 57,3 \cdot 10^5$ Pa„ $T_0 = 293$ K, $v_\mathrm{m} = 5{,}69 \cdot 10^{-5}$ m^3/mol otrzymamy

$$V_0 \approx 184 \text{ m}^3. \tag{54}$$

Jest to pojemność połowy sferycznego balonu o promieniu około 4,5 m.

Punktacja zadania 3.

Praca sprężania przy małej zmianie objętości gazu (wzór (41) lub wzór równoważny pozwalający na wyznaczenie całkowitego W_c) .... 1 pkt.

Całkowita praca potrzebna do sprężenia gazu (wzór (40) lub wzór równoważny) ..... 2 pkt.

Uwzględnienie pracy wykonywanej przez ciśnienie atmosferyczne (wzór (44) w trakcie sprężania gazu (np. we wzorze (45)) .... 2 pkt.

Praca wykonana w trakcie skraplania (wzór (46) lub wzór równoważny) .... 2 pkt.

Jawny wzór na V_0 wyrażone przez znane parametry (wzór (53) lub wzór równoważny) 2 pkt
(1 pkt. jeśli pominięto v_m).

Wynik liczbowy (54) .... 1 pkt
(również jeśli otrzymany wzór na V_0 jest przybliżony, tzn. pomija v_m).