

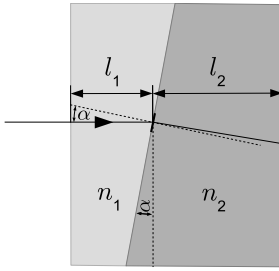
# LXX OLIMPIADA FIZYCZNA

## ZAWODY II STOPNIA

CZĘŚĆ TEORETYCZNA, 10.01.2021

Za każde zadanie można otrzymać maksymalnie 20 punktów.

### Zadanie 1

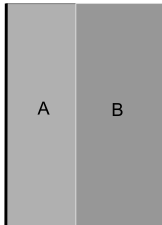


Siatka dyfrakcyjna o stałej siatki  $d$  znajduje się na granicy dwóch ośrodków (1) i (2) o współczynnikach załamania światła odpowiednio  $n_1$  i  $n_2$ . Na siatkę pada od strony ośrodka (1) wiązka światła lasera o długości fali w próżni równej  $\lambda$ , przy czym  $\lambda \ll d$ . Kąt padania wynosi  $\alpha$ . W odległości  $l_2$  ( $l_2 \gg d$ ) od siatki znajduje się ekran prostopadły do początkowego kierunku biegu wiązki – patrz rysunek. Brzeg ośrodka (1) znajduje się w odległości  $l_1$  ( $l_1 \gg d$ ) od siatki dyfrakcyjnej.

Uwzględniając, że kąt  $\alpha$  jest na tyle mały, że można przyjąć  $\sin \alpha \approx \alpha$ ,  $\cos \alpha \approx 1$ , oraz pomijając odbicie światła na granicy ośrodków, wyznacz odległość między maksimami  $m$  – tego oraz zerowego prążka interferencyjnego. Rozważ tylko  $m = \pm 1, \pm 2$ .

Podaj wyniki liczbowe dla  $l_1 = 1$  m,  $l_2 = 2$  m,  $\lambda = 405$  nm,  $d = 5000$  nm,  $n_1 = 1,33$ ,  $n_2 = 1,50$ ,  $m = \pm 1$ .

### Zadanie 2



Między dwiema równoległymi, metalowymi płytkami A i B o powierzchni  $S$  każda znajdują się równoległe do nich warstwy materiałów: A, o module Younga  $Y_A$  oraz B, o module Younga  $Y_B$ . Opory właściwe tych warstw wynoszą odpowiednio  $\rho_A$  oraz  $\rho_B$ . Warstwy są przyklejone do siebie oraz do odpowiedniej płytki (jakikolwiek wpływ własności kleju można pominąć), a ich przenikalność elektryczna jest równa (w przybliżeniu) przenikalności elektrycznej próżni  $\epsilon_0$  (materiały mają strukturę porowatą, ale wielkość porów jest znacznie mniejsza niż grubość danej warstwy, więc każdą z nich można traktować jako jednorodną). Grubości warstw są znacznie mniejsze niż ich poprzeczne rozmiary. Jedna z płytek jest umocowana, natomiast druga płytka może się przesuwać i nie działają na nią żadne siły zewnętrzne. Początkowo płytki były nienaładowane, nie płynął między nimi prąd, a grubości odpowiednich warstw wynosiły  $d_{A0}$  oraz  $d_{B0}$ .

Płytki podłączono do stałego napięcia  $U$ . Przyjmując, że opór elektryczny warstw nie zmienia się w wyniku ściśnięcia lub rozciągnięcia, wyznacz zmianę odległości między

płytkami (w porównaniu do sytuacji początkowej) po długim czasie.

Podaj wynik liczbowy dla  $\rho_A = 1,0 \cdot 10^{10}$   $\Omega\text{m}$ ,  $\rho_B = 2,0 \cdot 10^{10}$   $\Omega\text{m}$ ,  $Y_A = 1,0 \cdot 10^6$  Pa,  $Y_B = 2,0 \cdot 10^6$  Pa,  $d_{A0} = 1,0 \cdot 10^{-4}$  m,  $d_{B0} = 2,0 \cdot 10^{-4}$  m,  $S = 1,0 \cdot 10^{-3}$  m<sup>2</sup>,  $U = 10000$  V.

Uwaga:

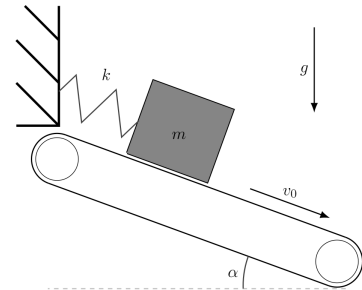
Moduł Younga jest zdefiniowany następująco

$$Y = \frac{F}{S} \frac{d}{\Delta d},$$

gdzie  $F$  jest siłą rozciągającą ( $F > 0$ ) lub ściskającą ( $F < 0$ ) warstwę,  $S$  – jej początkową powierzchnią,  $d$  – początkową grubością warstwy,  $\Delta d$  – zmianą tej grubości wywołaną ściskaniem lub rozciąganiem.

Przenikalność elektryczna próżni jest równa  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$   $\frac{\text{F}}{\text{m}}$ .

### Zadanie 3



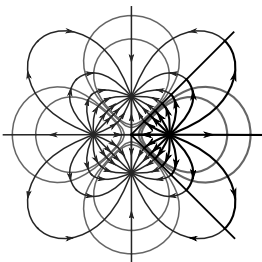
Klocek o masie  $m$  jest przymocowany do nieruchomej ściany sprężyną o stałej sprężystości  $k$  i opiera się na pasie transmisyjnym tworzącym z poziomem kąt  $\alpha$ . Sprężyna jest równoległa do pasa. Współczynnik tarcia klocka o pas wynosi  $\mu_k$  dla tarcia kinetycznego oraz  $\mu_s$  dla tarcia statycznego ( $\mu_k < \mu_s$ ). Początkowo pas był nieruchomy, ale swobodny (tzn. mógł się przesuwać bez oporów), a klocek spoczywał względem ściany.

W chwili  $t = 0$  napęd pasa został włączony i od tego momentu pas przesuwa się ze stałą prędkością  $v_0$  ( $v_0 > 0$ , zwrot jak na rysunku). Po pewnym czasie ruch klocka ustali się w formie okresowych drgań.

Opisz ruch klocka podczas tych drgań. Wyznacz skrajne wychylenia klocka względem położenia początkowego.

Podaj wyniki liczbowe tych skrajnych wychyleń, gdy  $m = 1$  kg,  $\alpha = 30^\circ$ ,  $k = 10$  N/m,  $\mu_k = 0,4$ ,  $\mu_s = 0,5$ ,  $g = 9,81$  m/s<sup>2</sup> w dwóch przypadkach prędkości pasa transmisyjnego:

- $v_0 = 1,5$  m/s,
- $v_0 = 0,5$  m/s.



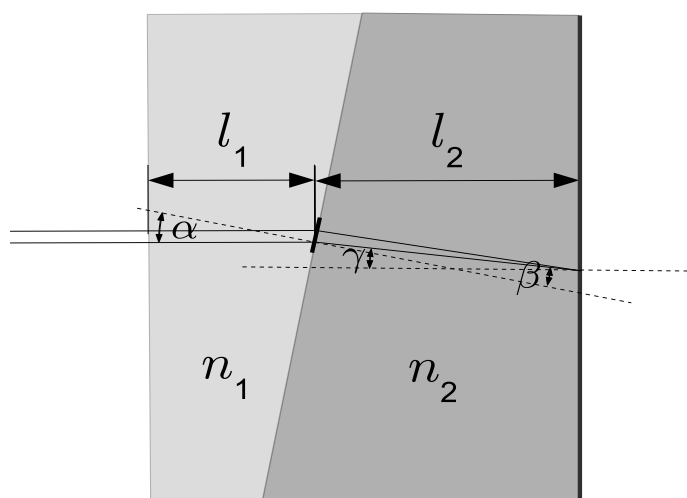
# LXX OLIMPIADA FIZYCZNA

## ROZWIĄZANIA ZADAŃ ZAWODÓW II STOPNIA

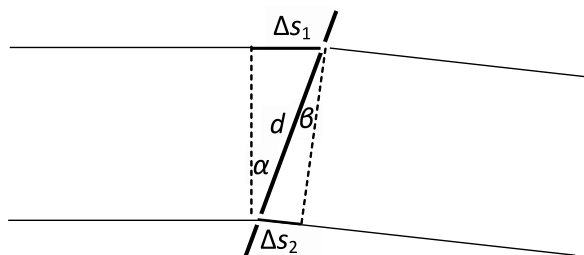
### CZĘŚĆ TEORETYCZNA

#### Rozwiązanie zadania 1

Aby rozwiązać to zadanie, należy wyznaczyć różnicę faz dwóch fal dochodzących do tego samego punktu na ekranie a przechodzących przez sąsiednie szczeliny siatki dyfrakcyjnej. Drogi tych fal przedstawiono schematycznie na rysunku.



W ośrodku 1 fala docierająca do górnej szczeliny na rysunku musi pokonać drogę o  $\Delta s_1 = d \sin \alpha$  większą od fali docierającej do dolnej szczeliny, patrz poniższy rysunek



Stąd wynika, że różnica faz między tymi falami w ośrodku (1) jest równa

$$\Delta\varphi_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1} \Delta s_1 \approx \frac{2\pi d \alpha}{\lambda_1}$$

gdzie  $\lambda_1$  jest długością fali w ośrodku (1), czyli  $\lambda_1 = \lambda/n_1$ . Zatem wzór na  $\Delta\varphi_1$  przybiera postać

$$\Delta\varphi_1 = \frac{2\pi n_1 d \sin \alpha}{\lambda}. \quad (1)$$

W podobny sposób obliczamy różnicę faz wynikającą z tego, że dolna fala ma dłuższą niż górna drogę do tego samego punktu na ekranie. Zauważmy, że na odległościach rzędu wielokrotności  $d$  odcinki odpowiadające tym dwóm drogom można traktować jako równoległe. Oznaczmy przez  $\beta$  kąt jaki tworzą te odcinki z normalną do granicy ośrodków (1) i (2) – patrz rysunek. Różnica dróg jakie przebywają fale w ośrodku (2) po przejściu z ośrodka (1) do ośrodka (2) wynosi

$$\Delta s_2 = -d \sin \beta.$$

Minus odpowiada temu, że tutaj droga odpowiadająca dolnej fali jest dłuższa, a poprzednio była krótsza.

Odpowiadająca tej różnicy dróg różnica faz wynosi

$$\Delta\varphi_2 = \frac{2\pi n_2 d \sin \beta}{\lambda}, \quad (2)$$

gdzie uwzględniliśmy, że w ośrodku (2) długość fali jest równa  $\lambda/n_2$

Zatem całkowita różnica faz między rozważanymi falami wynosi

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2 = \frac{2\pi d}{\lambda} (n_1 \sin \alpha - n_2 \sin \beta). \quad (3)$$

Konstruktywna interferencja zachodzi gdy różnica faz jest wielokrotnością  $2\pi$ , czyli gdy

$$\frac{2\pi d}{\lambda} (n_1 \sin \alpha - n_2 \sin \beta) = 2\pi m. \quad (4)$$

Z tego warunku możemy wyznaczyć  $\sin \beta$

$$\sin \beta = \frac{n_1}{n_2} \sin \alpha - m \frac{\lambda}{n_2 d}. \quad (5)$$

Ponieważ  $\alpha$  jest małe,  $\lambda/d$  jest małe,  $n_1, n_2$  dla wszystkich znanych materiałów jest rzędu jedności, a  $m$  może być równe  $\pm 1, \pm 2$ , prawa strona powyższej równości jest mała, a zatem  $\sin \beta$  jest małe i można przyjąć  $\sin \beta \approx \beta$ . Zatem powyższe równanie można zapisać jako

$$\beta = \frac{n_1}{n_2} \alpha - m \frac{\lambda}{n_2 d}. \quad (6)$$

Z rozważań geometrycznych kąt padania fali na ekran  $\gamma$  jest równy

$$\gamma = \alpha - \beta. \quad (7)$$

Przesunięcie pionowe punktu na ekranie (w porównaniu z przedłużeniem promienia biegnącego w ośrodku (1); przyjmujemy, że dodatnie przesunięcie jest w dół rysunku) jest dane wzorem

$$y = l_2 \operatorname{tg} \gamma. \quad (8)$$

Ponieważ z poprzednich wzorów wynika, że  $\gamma$  jest małe, możemy przyjąć  $\operatorname{tg} \gamma \approx \gamma$  i rozważane przesunięcie będzie równe

$$y_m = l_2 \left( \alpha - \frac{n_1}{n_2} \alpha + m \frac{\lambda}{n_2 d} \right). \quad (9)$$

Stąd szukana odległość między maksimum  $m$  – tego prążka a maksimum prążka zerowego  $\Delta y_m = y_m - y_0$  wynosi

$$\Delta y_m = m \frac{\lambda}{n_2 d} l_2. \quad (10)$$

Podstawiając dane liczbowe otrzymamy

$$\Delta y_{\pm 1} = \pm 0,11 \text{ m}. \quad (11)$$

### Błędy, jakie popełniano w rozwiązaniach zadania T1.

- Przyjęcie, że  $\alpha = 0$  z uzasadnieniem, że  $\alpha$  jest małe.  
Możliwość zastosowania przybliżenia  $\sin \alpha \approx \alpha$  nie oznacza, że  $\alpha = 0$ . (Zauważmy np., że przybliżenie  $\sin \alpha \approx \alpha$  robimy zwykle w przypadku wahadła matematycznego, co jednak nie znaczy, że to wahadło jest nieruchome.)
- Przyjęcie, że najpierw zachodzi dyfrakcja na siatce\*, potem załamanie na granicy ośrodków\*\*. Zwykle przy takim założeniu na pierwszym etapie korzystano ze wzoru dla siatki dyfrakcyjnej (wzór (S) w oznaczonej gwiazdką uwadze poniżej), czyli tak naprawdę ustawiano siatkę prostopadle do padającego światła, czasem przy tym przyjmując, że efektywna stała siatki będzie równa  $d \cos \alpha$ ; zwykle jednak korzystano ze wzoru (S) bez żadnego uzasadnienia.
- Przyjęcie, że najpierw zachodzi załamanie na granicy ośrodków\*\*, a potem dyfrakcja na siatce\*.  
W tym podejściu często przyjmowano, że to co się działo przed siatką nie ma żadnego znaczenia, czyli rozważano sytuacje tak, jakby światło padło prostopadle na siatkę (równoległą do granicy ośrodków). Na ogół jednak po prostu korzystano ze wzoru (S) bez żadnego uzasadnienia przyjmując, że kąt  $\theta_m$  występujący we wzorze (S) to kąt odchylenia od kierunku załamanego „promienia” (w praktyce to oznaczał o przyjęcie, że za granicą ośrodków znajduje się siatka dyfrakcyjna ustawiona prostopadle do kierunku od kierunku załamanego „promienia”, co jest drastycznie różną sytuacją od przedstawionej w treści zadania).

Wiele z powyższych podejść po dokonaniu przybliżeń prowadzi do dobrego przybliżonego wzoru na odległość między prążkiem zerowym a  $m$ -tym (ale zwykle już nie na samo położenie prążka zerowego) Rozwiązania zawierające powyższe błędy były punktowane bardzo nisko (nawet jeśli wyniki były zgodne z poprawnymi), gdyż rozwiązanie zadanie powinno zawierać poprawne rozumowanie prowadzące do wyniku, a rozwiązanie niepoprawne lub niewystarczająco uzasadnione, nawet w przypadku dobrego wyniku, jest po prostu złe.

Warto też zwrócić uwagę, że często samo wyznaczenie odległości między prążkami zawierało błędne zależności geometryczne, np. we wzorze typu wzoru (8) zamiast  $\text{tg}$  występował  $\sin$  bez komentarza, że stosuje się przybliżenie (np.  $\cos \gamma \approx 1$  lub że korzysta się z faktu małości  $\gamma$ ).

Bardzo dużo rozwiązań nie spełniało podstawowych kryteriów zawartych w „Krótkiej informacji na temat poprawnej redakcji rozwiązań zadań Olimpiady Fizycznej”, np.:

- Oznaczenia na rysunkach nie odpowiadały tym stosowanym w rozwiązaniu i pojawiały się nigdzie nie zdefiniowane oznaczenia.

- Brakowało skrótowych wyjaśnień (1-4 słowa), z jakich wzorów się korzysta, w tym brakowało komentarza, czy stosuje się jakieś przybliżenie, czy jedynie przekształca się któryś z zapisanych już wcześniej wzorów.

Powyższe braki pogarszały czytelność rozwiązania i uniemożliwiały prześledzenie rozumowania autora, które to rozumowanie (spójne i poprawne rozumowanie w oparciu o podręcznikowe prawa fizyczne) jest najistotniejszym punktowanym aspektem (o ile prawidłowo zapisane).

**Warto jednak zauważyć, że było też wiele rozwiązań całkowicie poprawnych, co oznacza, że zadanie nie przekraczało możliwości ucznia rozumiejącego zjawisko interferencji.**

\* Standardowy wzór na położenie maksimum prążków interferencyjnych

$$d \sin \theta_m = m \lambda_o. \quad (S)$$

gdzie  $d$  jest stałą siatki,  $\lambda_o$  długością fali w ośrodku za siatką,  $\theta_m$  – kątem w stosunku do prostopadłej do siatki pod którym obserwujemy  $m$ -te maksimum, obowiązuje w sytuacji, gdy światło pada prostopadle na siatkę (bo wtedy fazy we wszystkich szczelinach są takie same), a ośrodek za siatką jest jednorodny. W każdym innym przypadku (np. fala nie pada prostopadle na siatkę lub gdy ośrodek za nią nie jest jednorodny) ten wzór nie obowiązuje lub jego zastosowanie wymaga dodatkowego uzasadnienia.

\*\* Ściśle rzecz biorąc prawo załamania światła (prawo Snella) dotyczy optyki geometrycznej, lub optyki falowej pod warunkiem, że szerokość wiązki światła jest znacznie większa niż długość jego fali. W szczególności zauważmy, że wzory (4) lub (5), oznaczające warunek interferencji konstruktywnej, w przypadku zerowego prążka ( $m = 0$ ) są zgodne z prawem załamania. Zatem w tym zadaniu nie było potrzeby wykorzystywania prawa załamania jako czegoś niezależnego od interferencji.

### Punktacja zadania 1.

Różnica faz obu rozważanych fal w ośrodku (A) (wzór (1); może to też być odpowiedni wzór na różnicę dróg optycznych; dopuszczalne jest użycie przybliżenia  $\sin \alpha \approx \alpha$  już na tym etapie) ..... 1 pkt.  
 Różnica faz obu rozważanych fal w ośrodku (B) (wzór (2); może to też być odpowiedni wzór na różnicę dróg optycznych) ..... 1 pkt.  
 Warunek interferencji (wzór (4) lub równoważny) ..... 2 pkt.  
 Związek między kątem padania na ekran a kątami  $\alpha$  i  $\beta$  (wzór (7) lub równoważny) .2 pkt.  
 Wynik końcowy (wzór (10); dopuszczalny jest przeciwny znak) ..... 3 pkt.  
 Poprawny wynik liczbowy (wzór (11)) ..... 1pkt.

### Rozwiązanie zadania 2

Ponieważ materiały są połączone szeregowo, to między płytkami płytami płynie prąd o natężeniu

$$I = \frac{US}{\rho_A d_{A0} + \rho_B d_{B0}}. \quad (12)$$

Spadki napięcia w warstwach wynoszą odpowiednio  $U_A = I\rho_A d_{A0}/S$  oraz  $U_B = I\rho_B d_{B0}/S$ . Zatem natężenie pola elektrycznego w obszarze odpowiednich materiałów wynoszą

$$E_A = \frac{U_A}{d_{A0}} = \frac{I}{S}\rho_A, \quad (13)$$

$$E_B = \frac{U_B}{d_{B0}} = \frac{I}{S}\rho_B. \quad (14)$$

Z prawa Gaussa wynika, że ładunki na płytkach wynoszą odpowiednio

$$Q_A = \varepsilon_0 E_A S, \quad (15)$$

$$Q_B = -\varepsilon_0 E_B S. \quad (16)$$

Ponieważ na zewnątrz kondensatora natężenie pola elektrycznego jest równe 0, zewnętrzne pole elektryczne, w którym znajduje się dana płytka ma natężenie odpowiednio  $E_A/2$  lub  $E_B/2$ . Zatem siły elektrostatyczne, jakie działają na każdą z płytek wynoszą odpowiednio

$$F_A = Q_A \frac{E_A}{2} = \frac{\varepsilon_0}{2} \left( \frac{I}{S}\rho_A \right)^2 S, \quad (17)$$

$$F_B = Q_B \frac{E_B}{2} = -\frac{\varepsilon_0}{2} \left( \frac{I}{S}\rho_B \right)^2 S. \quad (18)$$

Zauważmy, że w ogólnym przypadku  $F_A + F_B \neq 0$ . Jest to spowodowane tym, że pomiędzy materiałami gromadzi się ładunek

$$Q_{AB} = \varepsilon_0 (E_B - E_A) S. \quad (19)$$

Ten ładunek znajduje się w zewnętrznym polu elektrycznym  $E_{AB} = (E_A + E_B)/2$ , a zatem działa na niego siła

$$F_{AB} = Q_{AB} E_{AB} = -F_A - F_B. \quad (20)$$

To oznacza, że siła elektryczna rozciągająca warstwę A wynosi  $-F_A$  (będzie ona ujemna, czyli tak naprawdę będzie to siła ściskająca), a siła elektryczna rozciągająca warstwę B wynosi po prostu  $F_B$  ( $F_B$  jest ujemne, zatem warstwa B też będzie ściskana). Te siły muszą być równoważone przez odpowiednie siły sprężystości, a zatem

$$F_A = -Y_A \frac{\Delta d_A}{d_{A0}} S, \quad (21)$$

$$F_B = Y_B \frac{\Delta d_B}{d_{B0}} S. \quad (22)$$

Czyli muszą być spełnione równości

$$\frac{\varepsilon_0}{2} \left( \frac{I}{S}\rho_A \right)^2 S = -Y_A \frac{\Delta d_A}{d_{A0}} S, \quad (23)$$

$$\frac{\varepsilon_0}{2} \left( \frac{I}{S}\rho_B \right)^2 S = Y_B \frac{\Delta d_B}{d_{B0}} S. \quad (24)$$

Zatem zmiana odległości między płytkami wynosi

$$\Delta d = -\frac{\varepsilon_0}{2} \left( \frac{U}{\rho_A d_{A0} + \rho_B d_{B0}} \right)^2 \left( \frac{\rho_A^2}{Y_A} d_{A0} + \frac{\rho_B^2}{Y_B} d_{B0} \right). \quad (25)$$

Znak minus powyżej oznacza, że odległość między płytkami się zmniejszyła – warstwy uległy ściśnięciu. Dla podanych danych liczbowych otrzymujemy

$$\Delta d = 8,85 \cdot 10^{-7} \text{ m.} \quad (26)$$

Zauważmy, że gdy  $\rho_A = \rho_B$  otrzymamy

$$\Delta d = -\frac{\varepsilon_0}{2} \left( \frac{U}{d_{A0} + d_{B0}} \right)^2 \left( \frac{d_{A0}}{Y_A} + \frac{d_{B0}}{Y_B} \right). \quad (27)$$

W powyższym wzorze wielkość

$$\frac{\varepsilon_0}{2} \left( \frac{U}{d_{A0} + d_{B0}} \right)^2 = f \quad (28)$$

jest po prostu siłą, z jaką przyciągają się okładki kondensatora płaskiego, podzieloną przez powierzchnię tych okładek kondensatora, natomiast wielkości  $-f \frac{d_{A0}}{Y_A}$  oraz  $-f \frac{d_{B0}}{Y_B}$  odpowiadają zmianie grubości każdej z warstw.

### Najczęstsze błędy popełniane w zadaniu T2:

- Traktowanie opisanego w zadaniu układu jako jeden pojedynczy kondensator. Przepływ prądu przez opisany układ i inna oporność każdej z warstw indukują różne napięcia w każdym z obszarów A i B. Na okładkach powstaje różnowartościowy ładunek (w szczególności na płycie środkowej zebrany ładunek jest niezerowy).
- Próby wyznaczania wypadkowego modułu Younga obu warstw. Ze względu na różnowartościowe ładunki na okładkach kondensatorów A i B siły ściskające każdą z warstw mają różne wartości. Nie można traktować tych materiałów jako jeden jednorodny materiał.
- Wyznaczanie siły między okładkami ze wzoru na siłę Coulomba pomiędzy pojedynczymi ładunkami (o wartościach równych całkowitemu ładunkowi zebranemu na danej okładce).

Rozwiązania oparte na traktowaniu opisanego w zadaniu układu jako pojedynczy kondensator o jednakowych ładunkach na okładkach i jednorodnym polu elektrycznym w swojej objętości były punktowane (zgodnie z treścią oficjalnej punktacji) na 2 punkty. W takich rozwiązaniach 1 punkt przyznawano za zauważenie, że przez układ przepływa prąd, wyznaczenie oporności warstw oraz wzoru na natężenie prądu. Kolejny zaś 1 punkt za przedstawienie w formie ogólnej wzorów na punktowane w treści zadania wartości (ładunek na okładkach kondensatora, wzory na pole elektryczne oraz siłę między okładkami), które to wzory bez prawidłowego zrozumienia układu jako dwa połączone kondensatory, nie mogły być punktowane (jako że napisanie ich wymaga jedynie przepisania z podręcznika lub notatek, a nie rzeczywistego zrozumienia zjawisk fizycznych zachodzących w opisanym układzie).

Zdarzało się, że uczestnik/iczka nie dokonywał/a przybliżenia  $\Delta d \rightarrow 0$  (gdzie  $\Delta d$  to zmiana odległości między okładkami) i w wyniku tego otrzymywał/a równania wielomianowe, które nie były odpowiednio rozwiązywane. W takich przypadkach, jeśli przedstawione równanie na wyznaczenie odpowiednich zmian odległości było poprawne, uczestnicy/iczki otrzymywali 8 z 10 przewidzianych za rozwiązanie punktów.

Na wyróżnienie zasługują nieliczne rozwiązania oparte na przekształceniach energii pomiędzy różnymi stanami układu. Były one także punktowane odpowiednio do otrzymanych przez uczestnika/iczkę wyników, według punktacji proporcjonalnej do punktacji przedstawionej w oficjalnym rozwiązaniu (w takim rozwiązaniu nie było przykładowo konieczne wyznaczenie sił pomiędzy okładkami, a punktowane były praca sił sprężystości i równania na zmiany energii kondensatorów).

### Punktacja zadania 2.

Natężenie prądu płynącego między płytkami (wzór (12) lub równoważny) ..... 1 pkt.  
 Pole elektryczne w obszarze każdej z warstw (wzory (13), (14) lub równoważne) ..... 1 pkt.  
 Ładunki elektryczne na każdej z okładek (wzory (15), (16) lub równoważne; nie jest konieczne jawne uwzględnienie, że te ładunki mają przeciwny znak) ..... 2 pkt.  
 Siły elektryczne działające na każdą z okładek (wzory (17), (18) lub równoważne; nie jest konieczne jawne uwzględnienie, że te siły mają przeciwny znak) ..... 2 pkt.  
 Jawne wyrażenie na zmianę odległości między płytkami (wzór (25) lub równoważny) 3 pkt.  
 Wynik liczbowy (wzór (26)) ..... 1 pkt.

### Rozwiązanie zadania 3

Na klocek działają siły: ciężkości  $mg$ , sprężystości sprężynki, tarcia  $T$  oraz prostopadła do pasa siła reakcji pasa.

W kierunku prostopadłym do pasa transmisyjnego siły się równoważą; w kierunku równoległym do niego równanie ruchu ma postać

$$ma = -kx + T, \quad (29)$$

gdzie  $x$  jest odchyleniem od położenia początkowego, natomiast  $a$  jest przyspieszeniem klocka. Zauważmy, że nie występuje tu składowa siły ciężkości wzdłuż pasa transmisyjnego –  $x$  jest tak zdefiniowane, że dla  $x = 0$  ta składowa i siła sprężystości się równoważą.

Siła tarcia jest równa

$$T = \mu_k mg \cos \alpha, \text{ gdy } v < v_0, \quad (30)$$

$$-\mu_s mg \cos \alpha \leq T \leq \mu_s mg \cos \alpha, \text{ gdy } v = v_0, \quad (31)$$

$$T = -\mu_k mg \cos \alpha, \text{ gdy } v > v_0, \quad (32)$$

gdzie  $v$  jest prędkością klocka względem ściany. Skoro początkowo klocek jest w równowadze i nie porusza się, nie oczekujemy żeby zaszedł przypadek  $v > v_0$ .

Po uruchomieniu pasa klocek zaczyna się przesuwac zgodnie z kierunkiem ruchu pasa. Zachodzi  $v < v_0$ , a zatem równanie ruchu przyjmuje postać

$$ma = -kx + \mu_k mg \cos \alpha. \quad (33)$$

Zauważmy, że po podstawieniu  $x = \tilde{x} + \mu_k mg \cos \alpha / k$  otrzymamy w zmiennej  $\tilde{x}$  zwykłe równanie ruchu harmonicznego. Zatem ruch klocka jest ruchem harmonicznym wokół położenia równowagi  $x = x_0$ , gdzie

$$x_0 = \frac{\mu_k mg \cos \alpha}{k}, \quad (34)$$



z częstotliwością

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (35)$$

Ponieważ w chwili początkowej klocek spoczywa i jest wychylony na odległość  $\mu_k mg \cos \alpha / k$  od położenia równowagi, amplituda tych drgań jest równa właśnie  $x_0$ . Po uwzględnieniu warunków początkowych zależność położenia  $x$  od czasu  $t$  jest następująca

$$x = x_0 (1 - \cos \omega t), \quad (36)$$

Teoretyczna maksymalna prędkość w takim ruchu wynosi

$$v_{\max} = x_0 \omega = \sqrt{\frac{m}{k}} \mu_k g \cos \alpha. \quad (37)$$

Można ją uzyskać z równania (36) lub z efektywnej zasady zachowania energii  $mv_{\max}^2/2 = \frac{(\mu_k mg \cos \alpha)^2}{2k}$ ; „efektywnej” dlatego, że ze względu na występowanie tarcia poślizgowego energia mechaniczna nie jest zachowana, ale związana z nią siła jest stała i możemy tę siłę z punktu widzenia klocka traktować jako siłę zachowawczą.

Jeśli  $v_{\max} < v_0$ , to klocek będzie stale ślizgał się po pasie. Ruch będzie w tym przypadku zwykłym ruchem harmonicznym z okresem  $2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ ; skrajne położenia klocka w tym ruchu są następujące

$$x_{\min} = 0, \quad (38)$$

$$x_{\max} = \frac{2\mu_k mg \cos \alpha}{k}. \quad (39)$$

Jeśli  $v_{\max} \geq v_0$ , to rozwiązanie (36) (oraz równanie ruchu (33)) obowiązuje tylko do chwili, gdy  $v = v_0$ ; oznaczymy odpowiednie położenie jako  $x_s$ . W tym momencie siła tarcia maleje do takiej wartości, która równoważy siłę sprężystości, a klocek zaczyna poruszać się z prędkością pasa transmisyjnego (czyli spoczywa względem niego). Ten ruch powoduje dalszy wzrost napięcia sprężyny, aż do momentu, gdy efektywna siła sprężystości  $kx$  będzie równa maksymalnej sile tarcia  $\mu_s mg \cos \alpha$ . Znajdzie to przy wychyleniu

$$x_s = \frac{\mu_s mg \cos \alpha}{k}. \quad (40)$$

Ponieważ prędkość klocka jest niezerowa i dodatnia, klocek nadal będzie się oddalał od ściany, ale jego prędkość spadnie poniżej prędkości  $v_0$ , a zatem znowu będzie obowiązywać równanie ruchu (33) (ale już nie (36)). Maksymalną odległość  $x_{\max}$  na jaką oddali się klocek wyznaczymy z efektywnej zasady zachowanie energii

$$\frac{mv_0^2}{2} + \frac{k(x_s - x_0)^2}{2} = \frac{k(x_{\max} - x_0)^2}{2}. \quad (41)$$

czyli

$$x_{\max} = \sqrt{\frac{m}{k} v_0^2 + (x_s - x_0)^2} + x_0 \quad (42)$$

lub w jawnej postaci

$$x_{\max} = \sqrt{\frac{m}{k} v_0^2 + \frac{m}{k} (\mu_s - \mu_k)^2 g^2 \cos^2 \alpha} + \frac{m\mu_k g \cos \alpha}{k} \quad (43)$$

Po osiągnięciu maksymalnej odległości klocek zacznie wracać w kierunku ściany; ponieważ zwroty prędkości klocka i pasa transmisyjnego są przeciwne, stale będzie obowiązywało równanie ruchu (33) – będzie to ruch harmoniczny z amplitudą  $x_{\max} - x_0$  względem położenia  $x_0$  z częstością  $\omega$ . Biorąc pod uwagę warunki początkowe, zależność  $x$  od czasu będzie następująca

$$x = (x_{\max} - x_0) \cos \omega (t - t_{\max}) + x_0, \quad (44)$$

gdzie  $t_{\max}$  odpowiada rozważanej chwili największego oddalenia klocka od ściany. Zgodna z powyższym równaniem zależność prędkości od czasu jest następująca

$$v = -(x_{\max} - x_0) \omega \sin \omega (t - t_{\max}) \quad (45)$$

Największe zbliżenie klocka do ściany odpowiada położeniu

$$x_{\min} = -x_{\max} + 2x_0, \quad (46)$$

czyli w jawnej postaci

$$x_{\min} = -\sqrt{\frac{m}{k}} \sqrt{v_0^2 + \frac{m}{k} (\mu_s - \mu_k)^2 g^2 \cos^2 \alpha} + \frac{m\mu_k g \cos \alpha}{k}. \quad (47)$$

Po największym zbliżeniu klocek znowu zaczyna się oddalać od ściany. Sytuacja jest analogiczna, jak w pierwszym omawianym etapie ruchu; ruch jest harmoniczny aż do momentu, gdy  $v = v_0$ .

Odpowiednią odległość  $x_2$  można wyznaczyć na podstawie równań (44), (45), efektywnej zasady zachowania energii  $mv_0^2/2 + k(x_2 - x_0)^2/2 = k(x_{\max} - x_0)^2/2$ , lub po prostu z faktu, że jest ona symetryczna do  $x_s$  względem  $x_0$ . Jest ona równa

$$x_2 = -x_s + 2x_0. \quad (48)$$

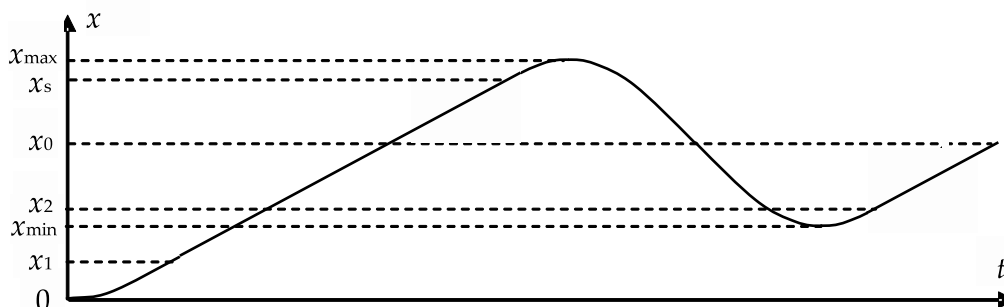
Ta wielkość musi być mniejsza od  $x_0$ , gdyż tuż przed rozważanym położeniem klocek przyspiesza. Zauważmy, że w tym punkcie wartość siły sprężystości  $|kx_2| = |-\mu_s + 2\mu_k| mg \cos \alpha$  jest na pewno mniejsza od maksymalnej siły tarcia  $\mu_s mg \cos \alpha$ , a więc na pewno klocek przestanie przyspieszać.

Od tego momentu ruch zaczyna być okresowy: klocek porusza się z prędkością  $v_0$  (przesuwając się razem z pasem transmisyjnym) aż do osiągnięcia odległości  $x_s$ , a potem znowu ruch jest harmoniczny, aż od osiągnięcia w trakcie oddalania od ściany położenia  $x = x_2$ .

Podsumowując

W przypadku  $\sqrt{\frac{m}{k}} \mu_k g \cos \alpha < v_0$  skrajne położenia klocka są dane wzorami (38), (39). Ruch jest zwykłym ruchem harmonicznym.

W przypadku  $\sqrt{\frac{m}{k}} \mu_k g \cos \alpha \geq v_0$  skrajne położenia klocka są dane wzorami (47), (43). Ruch jest częściowo ruchem harmonicznym, a częściowo jednostajnym, a okres tego ruchu jest dłuższy niż okres ruchu harmonicznego  $2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$ . Przykładowy ruch w tym przypadku jest przedstawiony na rysunku poniżej. Zauważmy, że  $x_{\min}$  może być dodatnie - tak jak na rysunku, ale może też być ujemne.



Dla podanych wartości liczbowych otrzymujemy ze wzoru (37)  $v_{\max} = 1,07$  m/s. Zatem w przypadku a) mamy do czynienia z ruchem harmonicznym i otrzymujemy

$$x_{\min} = 0 \text{ m}, x_{\max} = 0,68 \text{ m}. \quad (49)$$

W przypadku b) zachodzi  $v_0 < v_{\max}$  i mamy do czynienia z ruchem częściowo harmonicznym, częściowo jednostajnym. Otrzymujemy

$$x_{\min} = 0,16 \text{ m}, x_{\max} = 0,52 \text{ m}. \quad (50)$$

### Najczęstsze błędy popełniane w zadaniu T3:

- Bardzo często (wręcz w większości wypadków) zawodnicy przyjmowali, że gdy pas ruszył, klocek ruszył razem z nim, bez poślizgu. Przypominamy treść zadania: „Początkowo pas był nieruchomy (...) w chwili  $t = 0$  napęd pasa został włączony i od tego momentu pas przesuwa się ze stałą prędkością (...)”  
Opisywane jest tu wyraźnie nagłe (skokowe) ruszenie pasa, szarpnięcie — skoro tak, to do identycznego rozpoczęcia ruchu przez klocek potrzebna byłaby nieskończona siła. Nie ma podstaw do założenia, że taka siła tu występowała. Klocek początkowo spoczywał na pasie, ale nie był do niego przymocowany. W przypadku b), gdy prędkość pasa była mała, ten błąd nie przekreślał poprawnego dalszego ciągu rozwiązania (można było tylko stracić jeden z dwóch punktów za opis ruchu). Jednak zawodnik tracił możliwość poprawnego rozwiązania dla przypadku a), gdy ruch był czysto harmonicznym. W intencji autorów przypadek a) miał być łatwiejszą częścią zadania, „rozgrzewką” przed częścią b) – niestety nasze oczekiwania zawiodły.
- Znacznie poważniejszym błędem było przyjęcie, że klocek zawsze porusza się ze zwrotem zgodnym ze zwrotem siły — tak więc po przekroczeniu punktu, w którym siła tarcia statycznego nie może już utrzymać klocka nieruchomego względem pasa, klocek natychmiast (bez fazy ruchu opóźnionego) rozpoczynałby ruch w górę. Takie wyobrażenia są całkowicie sprzeczne z II zasadą dynamiki i to one są główną przyczyną niskich ocen za to zadanie.
- Innym grubym błędem było niezrozumienie tarcia statycznego: pewna (na szczęście, nie bardzo liczna) grupa zawodników przyjmowała, że działa ono na ciało nieruchome względem Ziemi!

Chociaż w opublikowanej punktacji wyróżniono punkt za poprawne równanie ruchu  $ma = -kx + T$ , to w rzeczywistości nie było to wymagane, jeśli zawodnik poprawnie zastosował zasadę

zachowania energii i wyciągnął z niej równoważne wnioski. Takie rozwiązanie mogło uzyskać nawet maksymalną ocenę.

### Punktacja zadania 3.

- Równanie ruchu w przypadku poślizgu (wzór (29) lub równoważny) ..... 1 pkt.  
 Zauważenie, że w przypadku poślizgu ruch jest ruchem harmonicznym wokół położenia równowagi  $x_0 = \mu_k mg \cos \alpha / k$  ..... 1 pkt.  
 Warunek  $\sqrt{\frac{m}{k}} \mu_k g \cos \alpha < v_0$  na to, żeby ruch był stale ruchem harmonicznym ..... 1 pkt.  
 Skrajne położenia klocka w przypadku  $\sqrt{\frac{m}{k}} \mu_k g \cos \alpha < v_0$  (wzory (38), (39) lub równoważne) ..... 1 pkt.  
 Opis ruchu w przypadku  $\sqrt{\frac{m}{k}} \mu_k g \cos \alpha \geq v_0$ : ruch harmoniczny względem położenia równowagi  $x_0$  aż do osiągnięcia prędkości  $v_0$ , następnie ruch jednostajny z prędkością  $v_0$  aż do momentu, gdy siła napięcia sprężyny będzie większa od siły tarcia statycznego; następnie znowu ruch harmoniczny względem położenia równowagi  $x_0$  (w tym osiągnięcie maksymalnej a potem minimalnej odległości od ściany) aż do momentu, gdy klocek znowu osiągnie prędkość  $v_0$  ..... 2 pkt.  
 Skrajne położenia klocka w przypadku  $\sqrt{\frac{m}{k}} \mu_k g \cos \alpha \geq v_0$  (wzory (47), (43) lub równoważne) ..... 2 pkt.  
 Poprawne wyniki liczbowe (wzory (49), (50)) ..... 2 pkt.