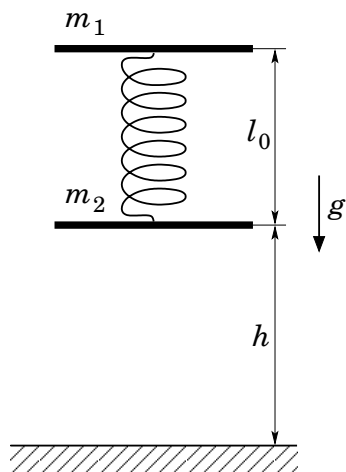


(Za każde zadanie można otrzymać 20pkt.)

Zadanie 1

Dwie cienkie, sztywne płyty o masach m_1 i m_2 są połączone nieważką sprężyną o stałej sprężystości k i długości swobodnej l_0 . W chwili początkowej (patrz rysunek) płyty spoczywają poziomo, jedna nad drugą, ponad poziomą podłogą (dolna płyta na wysokości h), a sprężyna jest nienapięta. Następnie płyty spadają swobodnie na podłogę. Zderzenie dolnej płyty z podłogą jest całkowicie niesprężyste, ale nie przykleja się ona do podłogi.



1. Jaka jest minimalna wysokość h_0 , taka, że dla $h > h_0$ dolna płyta podskoczy nad podłogę?
2. Dla danego $h > h_0$ wyznacz, na jaką maksymalną wysokość uniesie się po zderzeniu środek masy układu tych dwóch płyt.
3. Jaka powinna być wysokość h , aby odległość oraz prędkość względna płyt w chwili, gdy po odbiciu środek masy obu płyt będzie znajdował się na maksymalnej wysokości (patrz pkt. 2.) oraz w chwili oderwania się dolnej płyty od podłogi, były takie same? Podaj wartość najmniejszej wysokości h spełniającej ten warunek w przypadku $m_1 = 1 \text{ kg}$, $m_2 = 1 \text{ kg}$, $k = 100 \text{ N/m}$, $g = 9,8 \text{ m/s}^2$, $l_0 = 1 \text{ m}$.

Sprężyna jest umocowana centralnie – w wyniku zderzenia płyty nie przesuwają się w poziomie, ani się nie obracają. Parametry są takie, że płyty nie zderzają się ze sobą. Po oderwaniu się od podłogi, dolna płyta nie zderza się z nią przed osiągnięciem przez środek masy płyt maksymalnej wysokości.

Zadanie 2

W chwili początkowej w cylindrze zamkniętym ruchomym tłokiem znajduje się nasycona para wodna o objętości $V_0 = 100 \text{ dm}^3$ i temperaturze $t_0 = 100 \text{ }^\circ\text{C}$. Rozważ następujące przypadki bardzo wolnej przemiany, której poddawana jest ta para:

1. Sprężanie izotermiczne od objętości V_0 i temperatury t_0 , aż do osiągnięcia przez parę objętości $V_1 = 50 \text{ dm}^3$
2. Rozprężanie izotermiczne od objętości V_0 i temperatury t_0 , aż do osiągnięcia przez parę objętości $V_2 = 200 \text{ dm}^3$
3. Sprężanie adiabatyczne od objętości V_0 i temperatury t_0 , aż do osiągnięcia przez parę temperatury $t_3 = 105 \text{ }^\circ\text{C}$
4. Rozprężanie adiabatyczne od objętości V_0 i temperatury t_0 , aż do osiągnięcia przez parę temperatury $t_4 = 95 \text{ }^\circ\text{C}$

Dla każdego z czterech przypadków opisz jakościowo zachowanie się pary podczas przemiany i podaj końcowe ciśnienie pary ($p_1 = ?, p_2 = ?, p_3 = ?, p_4 = ?$). Poza parą w cylindrze nie znajdują

Tabela 1

$t [^\circ\text{C}]$	95	96	97	98	99	100	101	102	103	104	105
$p [\text{hPa}]$	845	877	909	943	978	1013	1050	1088	1127	1167	1208

się żadne inne gazy. Molowe ciepło właściwe przy stałej objętości pary wodnej wynosi $C_V = 3R$, gdzie $R = 8,31 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$ jest uniwersalną stałą gazową. Tabela 1 przedstawia zależność ciśnienia nasyconej pary wodnej od temperatury. Przyjmij, że jeśli para nie ulega skropleniu, to stosuje się ściśle do równania stanu gazu doskonałego.

Wskazówka

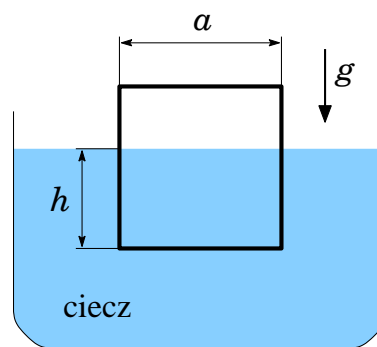
W trakcie przemiany adiabatycznej gazu doskonałego spełnione jest równanie

$$pV^\kappa = \text{const},$$

gdzie $\kappa = (C_V + R)/C_V$.

Zadanie 3

Długi solenoid o przekroju kwadratowym o boku a jest zanurzony na głębokość h w magnetycznej, nieprzewodzącej cieczy (patrz rysunek) o względnej przenikalności magnetycznej μ_r i gęstości ρ . Oś solenoidu jest równoległa do powierzchni cieczy.



Przekrój poprzeczny zanurzonego solenoidu

O ile poziom cieczy wewnątrz solenoidu będzie wyższy (lub niższy) od poziomu cieczy na zewnątrz, jeśli solenoid będzie podłączony do źródła prądu o ustalonym natężeniu I ? Podaj wartość liczbową dla $I = 1 \text{ A}$, liczby zwojów na jednostkę długości $n = 3000/\text{m}$, $\mu_r = 10$, $\rho = 2 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$, $a = 0,03 \text{ m}$, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T}\cdot\text{m/A}$ (przenikalność magnetyczna próżni), $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ (przyspieszenie ziemskie).

Ciecz może swobodnie wpływać i wypływać przez końce solenoidu i między zwojami. Przyjmij, że powierzchnia cieczy wewnątrz solenoidu (a również na zewnątrz) jest pozioma oraz, że względna przenikalność magnetyczna powietrza jest równa 1. Można pominąć niejednorodności pola magnetycznego w pobliżu przewodu, z którego jest zrobiony solenoid. Grubość tego przewodu jest znacznie mniejsza od a .

Wskazówki

1. Linie pola magnetycznego biegną równoległe do osi solenoidu. W części solenoidu wypełnionej cieczą indukcja pola magnetycznego B jest taka, jakby całe wnętrze solenoidu było wypełnione cieczą. W części solenoidu wypełnionej powietrzem indukcja pola magnetycznego B jest taka, jakby całe wnętrze solenoidu było wypełnione powietrzem.
2. Objętościowa gęstość energii pola magnetycznego jest dana wzorem

$$u = \frac{B^2}{2\mu_0\mu_r}$$

gdzie μ_r jest względną przenikalnością magnetyczną ośrodka.

3. Opór elektryczny przewodu, z którego zrobiony jest solenoid, nie ma wpływu na poziom cieczy wewnątrz solenoidu.

Rozwiązanie zadania 1

1. Dolna płyta podskoczy, jeśli działająca na nią siła naciągu sprężyny będzie większa od siły ciężkości. W chwili oderwania oznacza to, że

$$k(z_0 - l_0) = m_2g, \quad (1)$$

gdzie z_0 jest wysokością górnej płyty nad podłogą w tym momencie. Ponieważ w wyniku zderzenia cała energia kinetyczna dolnej płyty jest tracona, a energia górnej jest przekształcana w energię sprężystości sprężyny, z zasady zachowania energii otrzymujemy w granicznym przypadku

$$m_1g(h_0 + l_0) = m_1gz_0 + \frac{k}{2}(z_0 - l_0)^2. \quad (2)$$

Uwzględniając wzór (1) dostajemy

$$m_1g(h_0 + l_0) = m_1g\left(\frac{m_2g}{k} + l_0\right) + \frac{k}{2}\left(\frac{m_2g}{k}\right)^2.$$

Stąd

$$h_0 = \frac{m_2g}{k} \left(1 + \frac{m_2}{2m_1}\right). \quad (3)$$

2. Gdy $h > h_0$ dolna płyta również oderwie się w chwili, gdy górna płyta będzie na wysokości $z_0 = m_2g/k + l_0$ (patrz pkt 1.). Zasada zachowania energii ma w tym momencie postać

$$m_1g(h + l_0) = m_1gz_0 + \frac{k}{2}(z_0 - l_0)^2 + \frac{m_1}{2}v_1^2, \quad (4)$$

gdzie v_1 jest prędkością górnej płyty w chwili oderwania. Uwzględniając (2) wynosi ona

$$v_1 = \sqrt{2g(h - h_0)}. \quad (5)$$

W tym momencie prędkość środka masy płyt wynosi

$$\begin{aligned} v_{\text{SM}} &= \frac{m_1}{m_1 + m_2}v_1 \\ &= \frac{m_1}{m_1 + m_2}\sqrt{2g(h - h_0)}. \end{aligned} \quad (6)$$

Środek masy znajduje się w tym momencie na wysokości

$$z_{\text{SM}} = \frac{m_1z_0}{m_1 + m_2}. \quad (7)$$

Dalszy ruch układu jest złożeniem ruchu środka masy i drgań wokół niego. Energia drgań nie ulega zmianie, a energia kinetyczna środka masy przekształca się w energię potencjalną. Zatem maksymalna wysokość środka masy z_{SMmax} jest określona przez zasadę zachowania energii

$$\frac{m_1 + m_2}{2}(v_{\text{SM}})^2 + (m_1 + m_2)gz_{\text{SM}} = (m_1 + m_2)gz_{\text{SMmax}}. \quad (8)$$

Stąd

$$\begin{aligned} z_{\text{SMmax}} &= z_{\text{SM}} + \frac{m_1^2}{(m_1 + m_2)^2}(h - h_0) \\ &= \frac{m_1}{m_1 + m_2}\left(\frac{m_2g}{k} + l_0\right) + \frac{m_1^2}{(m_1 + m_2)^2}\left[h - \frac{m_2g}{k}\left(1 + \frac{m_2}{2m_1}\right)\right]. \end{aligned} \quad (9)$$

3. Od chwili oderwania się dolnej płyty od podłogi, środek masy układu porusza się z przyspieszeniem $-g$. Zatem czas jego ruchu do najwyższego położenia wynosi

$$\begin{aligned} T_{\text{wzn}} &= \frac{v_{\text{SM}}}{g} \\ &= \frac{m_1}{m_1 + m_2}\sqrt{2\frac{h - h_0}{g}}. \end{aligned} \quad (10)$$

Ruch dolnej płyty jest złożeniem ruchu środka masy i drgań wokół niego. Przy zmianie odległości górnej płyty od środka masy o Δx sprężyna ulega wydłużeniu o $\Delta x \cdot (m_1 + m_2)/m_2$, a zatem jej napięcie zmienia się o $\Delta F = k_1\Delta x$, gdzie $k_1 = k \cdot (m_1 + m_2)/m_2$. Częstota drgań ω jest równa $\sqrt{k_1/m_1}$, czyli

$$\omega = \sqrt{\frac{k(m_1 + m_2)}{m_1m_2}}. \quad (11)$$

Do osiągnięcia przez środek masy maksymalnej wysokości, płyty powinny wykonać całkowitą liczbę drgań, czyli

$$T_{\text{wzn}} = n \frac{2\pi}{\omega}, \quad (12)$$

gdzie n jest dowolną dodatnią liczbą całkowitą. Rozwiązując to równanie względem h (po uwzględnieniu (10) oraz (12)) otrzymamy

$$h = h_0 + n^2 \frac{2\pi^2 g (m_1 + m_2) m_2}{m_1 k}. \quad (13)$$

Podstawiając wartości liczbowe otrzymujemy $h_0 = 0,15$ m i dla $n = 1$

$$h \approx 4,0 \text{ m}. \quad (14)$$

Rozwiązanie zadania 2

W przypadku sprężania izotermicznego, para będzie się skraplać, aby utrzymać stałe ciśnienie, w związku z tym ciśnienie końcowe $p_1 = 1013\text{hPa}$. W przypadku rozprężania izotermicznego, para przestanie być nasycona i z równania:

$$p_2V_2 = pV \quad (1)$$

uzyskujemy: $p_2 = p/2 = 506,5\text{hPa}$.

W przypadku przemian adiabatycznych nie jest z góry oczywiste, w którym procesie (sprężania czy rozprężania) para będzie się skraplać. Aby to stwierdzić założmy chwilowo, że nie następuje skraplanie i rozważmy przemianę adiabatyczną pary, która na początku znajdowała się pod ciśnieniem $p = 1013\text{hPa}$ i w temperaturze $t = 100^\circ\text{C}$. Mamy spełniony warunek:

$$pV^\kappa = T^\kappa p^{1-\kappa} = \text{const}, \quad (2)$$

przy czym dla pary wodnej $\kappa = (C_V + R)/C_V = 4/3$. Mamy więc:

$$p(T) = AT^4, \quad (3)$$

gdzie A jest pewną stałą. Stałą proporcjonalności możemy wyznaczyć podstawiając $T = 100^\circ\text{C} \approx 373\text{K}$, $p = 1013\text{hPa}$ i otrzymujemy $A \approx 5,233 \cdot 10^{-6}\text{Pa/K}^4$. Można też zastosować wynikający z powyższego wzór, w którym występuje temperatura t w stopniach Celsjusza, jawnie gwarantujący spełnienie warunku początkowego $p(t) = [(t + 273^\circ\text{C})/373^\circ\text{C}]^4 \cdot 1013\text{hPa}$. Obliczając teraz ciśnienia dla temperatur z zakresu od 95°C do 105°C otrzymujemy:

$t[^\circ\text{C}]$	95	96	97	98	99	100	101	102	103	104	105
$p[\text{hPa}]$	959	970	981	991	1002	1013	1024	1034	1045	1057	1068

Widzimy, że dla temperatur $t < 100^\circ\text{C}$ wartości ciśnienia są wyższe niż odpowiednie wartości ciśnienia pary nasyconej podane w tabeli w treści zadania, natomiast dla temperatur $t > 100^\circ\text{C}$ są one niższe. Oznacza to, że podczas wykonywania sprężania adiabatycznego para nie będzie się skraplać (ciśnienia będą mniejsze niż ciśnienia pary nasyconej) i możemy użyć wzoru (3) by obliczyć ciśnienie końcowe, które wynosi $p_3 = 1068\text{hPa}$. Podczas rozprężania adiabatycznego, para będzie się skraplać i cały czas będzie pozostawać w stanie pary nasyconej. W związku z tym końcowe ciśnienie odczytujemy z tabeli podanej w treści zadania $p_4 = 845\text{hPa}$.

Rozwiązanie zadania 3

A. Rozwiązanie wykorzystujące, że przy małych odchyleniach od stanu równowagi, zmiana energii całkowitej powinna być równa 0.

Indukcja pola magnetycznego wewnątrz solenoidu wynosi: w cieczy – $\mu_0\mu_w nI$, w powietrzu – $\mu_0 nI$. Jeśli oznaczymy przez h_w poziom cieczy wewnątrz solenoidu ($h_w = h_0$ gdy $I = 0$) to strumień indukcji magnetycznej przechodzący przez powierzchnię prostopadłą do osi solenoidu wynosi

$$\begin{aligned}\Phi &= \mu_0 [\mu_r a h_w + (a - h_w) a] nI \\ &= \mu_0 a [(\mu_r - 1) h_w + a] nI,\end{aligned}\quad (1)$$

a energia pola magnetycznego wewnątrz solenoidu jest równa

$$U_B = \frac{\mu_0}{2} ((\mu_r - 1) a h_w + a a) n^2 I^2 l, \quad (2)$$

gdzie l jest długością solenoidu.

I. Sposób. Przy zmianie h_w o bardzo małą wielkość Δh_w zmienia się Φ . Jeśli zmiana zachodzi w czasie Δt , to indukowana jest siła elektromotoryczna $\mathcal{E} = -\Delta\Phi/\Delta t$. Ta siła przeciwstawia się płynącemu prądowi, w związku z czym źródło prądu musi wykonać pracę

$$\begin{aligned}\Delta W_Z &= -Inl\mathcal{E}\Delta t = Inl\Delta\Phi \\ &= \mu_0 (\mu_r - 1) a n^2 I^2 l \Delta h_w.\end{aligned}\quad (3)$$

Uwzględniając, że $I = \text{const}$, zmiana energii pola magnetycznego wynosi

$$\Delta U_B|_{I=\text{const}} = \frac{\mu_0}{2} (\mu_r - 1) a n^2 I^2 l \Delta h_w. \quad (4)$$

W sumie zmiana energii źródła prądu oraz pola magnetycznego wynosi

$$-\Delta W_Z + \Delta U_B|_{I=\text{const}} = -\frac{\mu_0}{2} (\mu_r - 1) a n^2 I^2 l \Delta h_w. \quad (5)$$

II. Sposób. Stan równowagi nie zależy od tego, czy przy zmianach h_w utrzymujemy stałe natężenie prądu, czy nie. Zatem zamiast rozważać przypadek $I = \text{const}$ i uwzględniać energię źródła, można rozważyć zamknięty obwód bezoporowy (nie podłączony do źródła), w którym dopuszczalne są zmiany I . W takim obwodzie nie może pojawić się siła elektromotoryczna (bo wywołałaby nieskończony prąd), a zatem zgodnie z prawem Faradaya $\Phi = \text{const}$. Energia pola magnetycznego wyrażona przez Φ ma postać

$$U_B = \frac{\Phi^2}{2\mu_0 [\mu_r a h_w + a(a - h_w)]}. \quad (6)$$

Zmiana tej energii przy ustalonym Φ jest równa

$$\Delta U_B|_{\Phi=\text{const}} = -\frac{\Phi^2 l}{2\mu_0 a [(\mu_r - 1) h_w + a]^2} (\mu_r - 1) \Delta h_w, \quad (7)$$

co po wyrażeniu przez I jest równe dokładnie (5).

W stanie równowagi ustalonym po włączeniu pola magnetycznego całkowita energia układu nie powinna się zmieniać przy małych zmianach h_w . W skład całkowitej energii prócz powyżej wymienionych wchodzi energia grawitacyjna cieczy (poniżej ρ jest jej gęstością, a g przyspieszeniem ziemskim)

$$U_W = \frac{1}{2} \rho g l (h_w - h)^2 a. \quad (8)$$

(Jest to energia cieczy o ciężarze $\rho g (h_w - h) a l$, której środek masy znajduje się na wysokości $(h_w - h)/2$.)

Warunek równowagi oznacza zatem

$$0 = \Delta U_B|_{I=\text{const}} - W_Z + \Delta U_W \quad (9)$$

lub

$$0 = \Delta U_B|_{\Phi=\text{const}} + \Delta U_W \quad (10)$$

W obu przypadkach otrzymujemy warunek

$$0 = -\frac{\mu_0}{2} (\mu_r - 1) a n^2 I^2 l \Delta h_w + \rho g l [-a h \Delta h_w + a h_w \Delta h_w].$$

Ta równość ma być spełniona przy wszystkich Δh_w , zatem

$$-\frac{\mu_0}{2}(\mu_r - 1)an^2I^2l + \rho g l a(h_w - h) = 0.$$

Stąd

$$h_w - h = \frac{\mu_0}{2\rho g}(\mu_r - 1)n^2I^2. \quad (11)$$

Zatem gdy $\mu_r > 1$ (paramagnetyk) to po włączeniu poziom cieczy wewnątrz solenoidu podniesie się, a gdy $\mu_r < 1$ (diamagnetyk) – obniży się.

Dla podanych wartości liczbowych otrzymujemy

$$h_w - h \approx 2,6 \text{ mm}. \quad (12)$$

B. Rozwiązanie oparte na rozważeniu działających sił.

Gdy jednorodny magnetyk umieścimy w zewnętrznym polu magnetycznym, na jego powierzchni wyindukuje się prąd. Pole magnetyczne pochodzące od tego wyindukowanego prądu powierzchniowego dodaje się do pola magnetycznego, jakie byłoby w danym obszarze w przypadku braku magnetyka. Aby w cieczy wewnątrz solenoidu indukcja B była równa $\mu_0\mu_r nI$, taki wyindukowany prąd na jednostkę długości solenoidu J_{ind} powinien spełniać warunek

$$\mu_0\mu_r nI = \mu_0 nI + \mu_0 J_{\text{ind}}$$

a zatem

$$J_{\text{ind}} = n(\mu_r - 1)I.$$

Ten prąd znajduje się w zewnętrznym ("próżniowym") polu magnetycznym o indukcji $\mu_0 nI$, zatem na górną powierzchnię cieczy w solenoidzie, na jednostkę długości solenoidu działa siła elektrodynamiczna

$$F_g = J_{\text{ind}} a \mu_0 nI = \mu_0(\mu_r - 1)an^2I^2. \quad (13)$$

Ta siła jest prostopadła do brzegu cieczy i skierowana "na zewnątrz". W obszarze, gdzie ciecz styka się z przewodem solenoidu sytuacja jest bardziej skomplikowana. W pobliżu powierzchni solenoidu (czyli w pobliżu przewodu) natężenie indukcji B zmienia się w sposób ciągły: na zewnątrz jest równe 0 wewnątrz jest równe $\mu_0\mu_r nI$. Przyjmując, że wyindukowany prąd znajduje się w polu o średniej wartości $(\mu_0\mu_r nI + 0)/2$, działająca siła elektrodynamiczna jest równa

$$F_d = J_{\text{ind}} a \frac{\mu_0 nI}{2} = \frac{1}{2}\mu_0(\mu_r - 1)an^2I^2. \quad (14)$$

(Powyższe rozumowanie można uściślić, przyjmując że grubość solenoidu wynosi d oraz, że rozkład prądu jest tam jednorodny, a następnie sumując przyczynki od cienkich warstw solenoidu.) W sumie siła wypadkowa działająca na ciecz wewnątrz solenoidu jest równa (dodatnia wartość oznacza siłę działającą w górę)

$$F_w = (F_g - F_d)l = \frac{1}{2}\mu_0(\mu_r - 1)n^2I^2al, \quad (15)$$

gdzie uwzględniliśmy, że rozważane siły skierowane są na zewnątrz rozważanego fragmentu cieczy.

Obliczona siła wypadkowa podnosi poziom cieczy wewnątrz solenoidu. Ciężar dodatkowej ilości cieczy wynosi

$$F_{\text{ciecz}} = \rho g(h_w - h)al. \quad (16)$$

Z warunku $F_w = F_{\text{ciecz}}$ otrzymujemy wynik (11).