ALGEBRA LINIOWA Z ELEMENTAMI GEOMETRII ANALITYCZNEJ

WSHE, O/K-CE

10. Homomorfizmy

Definicja 1. Niech V, W będą dwiema przestrzeniami liniowymi nad ustalonym ciałem $\mathbb{K}$, odwzorowanie $\varphi : V \to W$ nazywamy *homomorfizmem* lub *przekształceniem liniowym* jeżeli spełnione są następujące warunki:

- dla wszelkich $u, v \in V$ zachodzi $\varphi(u + v) = \varphi(u) + \varphi(v)$;
- dla każdego wektora $v \in V$ oraz każdego skalara $a \in \mathbb{K}$ zachodzi $\varphi(av) = a\varphi(v)$.

Nazewnictwo. Stosujemy następujące określenia:

homomorfizm: przekształcenie liniowe;
monomorfizm: różnowartościowe przekształcenie liniowe;
epimorfizm: przekształcenie liniowe *na* przestrzeń W;
izomorfizm: monomorfizm będący jednocześnie epimorfizmem;
endomorfizm: $V = W$;
automorfizm: endomorfizm będący izomorfizmem.

Uwaga 2. *Homomorfizmy mają następujące własności:*

- *dla wszelkich* $v_1, \ldots, v_n \in V$ *oraz* $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ *zachodzi* $\varphi(a_1v_1 + \cdots + a_nv_n) = a_1\varphi(v_1) + \cdots + a_n\varphi(v_n)$*;*
- $\varphi(\Theta) = \Theta$*;*
- *dla każdego* $v \in V$ *zachodzi* $\varphi(-v) = -\varphi(v)$*;*
- *jeżeli układ* $v_1, \ldots, v_n$ *jest liniowo zależny, to układ* $\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_n)$ *też jest liniowo zależny.*

Przykład 3. Następujące odwzorowania są homomorfizmami

- (homomorfizm zerowy) $\varphi : V \to W$ zadany $\varphi(v) = \Theta$ dla każdego $v \in V$;
- (homotetia) ustalmy $a \in \mathbb{K}$, zadajemy $\varphi : V \to V$ jako $\varphi(v) := av$;
- (rzutowanie) niech $V = V_1 \oplus V_2$, zadajemy $\pi_i : V \to V_i$ jako $\pi_i(v) = v_i$, gdzie $i \in \{1, 2\}$ oraz $v = v_1 + v_2$, $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$;

Date: 2003, semestr letni.

- V = przestrzeń funkcji różniczkowalnych, W = przestrzeń funkcji rzeczywistych $\varphi(f) := f'$;
- mamy ustaloną macierz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

zadajemy $\varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ jako

$$\varphi(\begin{pmatrix} v_{11} \\ \vdots \\ v_{n1} \end{pmatrix}) := \begin{pmatrix} a_{11}v_1 + \cdots + a_{1n}v_n \\ \vdots \\ a_{m1}v_1 + \cdots + a_{mn}v_n \end{pmatrix}$$

Uwaga 4. *Jeżeli $\varphi : V \to W$ jest homomorfizmem oraz $V' \subset V, W' \subset W$ są podprzestrzeniami przestrzeni V oraz W' odpowiednio, to $\varphi(V') \subset W, \varphi^{-1}(W') \subset V$ są podprzestrzeniami W oraz V.*

Definicja 5. Dla dowolnego homomorfizmu $\varphi : V \to W$ podprzestrzeń $\varphi^{-1}(\Theta) = \{v \in V : \varphi(v) = \Theta\}$ nazywamy *jądrem* odwzorowania φ i oznaczamy $\ker \varphi$.

Definicja 6. Dla dowolnego homomorfizmu $\varphi : V \to W$ podprzestrzeń $\varphi(V) = \{w \in W : \bigwedge_{v \in V} w = \varphi(v)\}$ nazywamy *obrazem* odwzorowania φ i oznaczamy $\operatorname{im} \varphi$.

Stwierdzenie 7. *Jeżeli $\varphi : V \to W$ jest homomorfizmem oraz $u, v \in V$, to*

$$\varphi(u) = \varphi(v) \iff u - v \in \ker \varphi.$$

Twierdzenie 8. *Homomorfizm $\varphi : V \to W$ jest monomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy* $\ker \varphi = \{\Theta\}$*. Homomorfizm $\varphi : V \to W$ jest epimorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy* $\operatorname{im} \varphi = W$*.*

Twierdzenie 9. *Niech $\varphi : V \to W$ będzie homomorfizmem. Jeżeli* $\dim V < \infty$*, to także* $\dim \ker \varphi < \infty$ *oraz* $\dim \operatorname{im} \varphi < \infty$*. Ponadto*

$$\dim V = \dim \ker \varphi + \dim \operatorname{im} \varphi.$$

Twierdzenie 10. *(o określaniu homomorfizmów) Niech V, W będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem $\mathbb{K}$ oraz niech $(v_1, \ldots, v_n)$ będzie bazą przestrzeni V. Niech dalej $(w_1, \ldots, w_n)$ będzie dowolnym układem wektorów w przetrzeni W. Wówczas istnieje dokładnie jeden homomorfizm $\varphi : V \to W$ taki, że $\varphi(v_i) = w_i$. Ponadto:*

- *dla dowolnego wektora $v = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n \in V$ zachodzi $\varphi(v) = a_1w_1 + \cdots + a_nw_n$;*
- *φ jest monomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy układ $(w_1, \ldots, w_n)$ jest liniowo niezależny;*

- *φ jest epimorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy $W = \mathrm{lin}(w_1, \ldots, w_n)$;*
- *φ jest izomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy układ $(w_1, \ldots, w_n)$ jest bazą W.*

Definicja 11. Przestrzenie liniowe V, W określone nad tym samym ciałem $\mathbb{K}$ nazywamy *izomorficznymi* jeżeli istnieje izomorfizm $\varphi : V \to W$, oznaczamy $V \cong W$.

Uwaga 12. *Dwie przestrzenie skończeniewymiarowe są izomorficzne wtedy i tylko wtedy gdy mają równe wymiary.*

Stwierdzenie 13. *Jeżeli $\dim V = \dim W < \infty$ oraz $\varphi : V \to W$ jest homomorfizmem, to następujące warunki są równoważne:*

- *φ jest monomorfizmem;*
- *φ jest epimorfizmem;*
- *φ jest izomorfizmem.*

11. Przestrzenie ilorazowe

Definicja 14. Niech $U \subset V$ będzie podprzestrzenią przestrzeni liniowej V oraz niech $v \in V$. Zbiór $v + U := \{v + u\colon u \in U\}$ nazywamy *warstwą* przestrzeni liniowej V względem podprzestrzeni U wyznaczoną przez wektor v.

Uwaga 15. *Warstwy $v + U, w + U$ są równe wtedy i tylko wtedy, gdy $v - w \in U$.*

Uwaga 16. *Zbiór wszystkich warstw przestrzeni V względem zadanej podprzestrzeni U z działaniami:*

$$(v + U) + (w + U) := (v + w) + U \quad \text{oraz} \quad a(v + U) := (av) + U$$

(gdzie $u, w \in V$ oraz $a \in \mathbb{K}$) jest przestrzenią liniową.

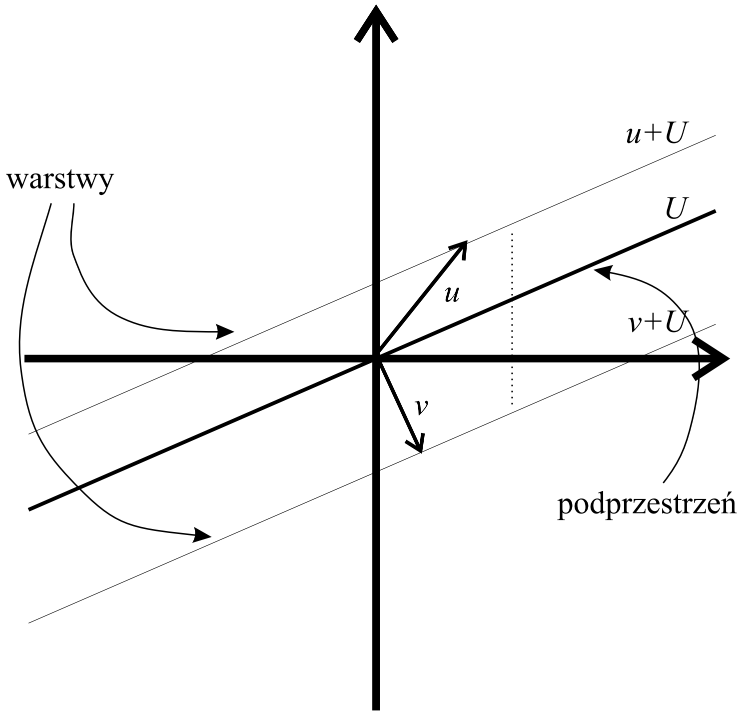
Definicja 17. Określoną powyżej przestrzeń nazywamy *przestrzenią ilorazową* przestrzeni V względem podprzestrzeni U i oznaczamy V/U.

Uwaga 18. *Jeżeli $\dim V < \infty$, to $\dim V/U = \dim V - \dim U$.*

Uwaga 19. *Odwzorowanie $\kappa : V \to V/U$ zadane następująco: dla każdego $v \in V$ przyjmujemy $\kappa(v) := v + U$ jest epimorfizmem.*

Odwzorowanie o którym mowa powyżej nazywamy *epimorfizmem kanonicznym.*

Twierdzenie 20. *Jeżeli $\varphi : V \to W$ jest epimorfizmem, to $W \cong V/\ker\varphi$. Ponadto izomorfizm $\psi : V/ker\varphi \to W$ można skonstruować tak, aby $\psi(\kappa(v)) = \varphi(v)$ dla każdego $v \in V$.*



Rysunek 1. Warstwy

Obserwacja 21. Zbiór rozwiązań jednorodnego układu równań liniowych, jest podprzestrzenią przestrzeni $\mathbb{K}^n$.

Obserwacja 22. Zbiór $\mathrm{Sol}(\mathcal{U})$ rozwiązań układu równań liniowych

$$(\mathcal{U}) : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

jest wartstwą v+$\mathrm{Sol}(\tilde{\mathcal{U}})$ przestrzeni $\mathbb{K}^n$ względem podprzestrzeni $\mathrm{Sol}(\tilde{\mathcal{U}})$ rozwiązań jednorodnego układu równań liniowych $\tilde{\mathcal{U}}$ powstałego z $\mathcal{U}$ poprzez zastąpienie kolumny wyrazów wolnych zerami. Warstwa ta jest wyznaczona przez wektor v będący dowolnym rozwiązaniem układu (niejednorodnego) $\mathcal{U}$.

Przykład 23. Prosta L jest warstwą w przestrzeni $\mathbb{R}^2$ względem prostej (podprzestrzeni) $\tilde{L}$, gdzie $L||\tilde{L}$ oraz $\tilde{L}$ przechodzi przez środek układu współrzędnych.

12. Algebra macierzy

Definicja 24. Sumą macierzy $A = (a_{ij})_{1\leqslant i\leqslant n,\, 1\leqslant j\leqslant m} \in M_{n,m}(\mathbb{K})$ oraz $B = (b_{ij})_{1\leqslant i\leqslant n,\, 1\leqslant j\leqslant m} \in M_{n,m}(\mathbb{K})$ nazywamy macierz $C := (a_{ij} + b_{ij})_{1\leqslant i\leqslant n,\, 1\leqslant j\leqslant m} \in M_{n,m}(\mathbb{K})$. Oznaczamy $C := A + B$.

Uwaga 25. *Dodawanie macierzy ma następujące własności:*

- $A + B = B + A$ *dla każdych* A, B*;*
- $a \cdot (A+B) = (a \cdot A) + (a \cdot B)$*, dla dowolnego skalara* $a \in \mathbb{K}$ *oraz macierzy* A, B*;*
- $A + (B + C) = (A + B) + C$ *dla dowolnych* A, B, C*;*
- $A + (0)_{1\leqslant i\leqslant n,\, 1\leqslant j\leqslant m} = A$
- $A + (-a_{ij})_{1\leqslant i\leqslant n,\, 1\leqslant j\leqslant m} = (0)_{1\leqslant i\leqslant n,\, 1\leqslant j\leqslant m}$.

Definicja 26. Iloczynem macierzy $A = (a_{ij})_{1\leqslant i\leqslant n,\, 1\leqslant j\leqslant m} \in M_{n,m}(\mathbb{K})$ oraz $B = (b_{ij})_{1\leqslant i\leqslant m,\, 1\leqslant j\leqslant l} \in M_{m,l}$ nazywamy macierz $C = (c_{ij})_{1\leqslant i\leqslant n,\, 1\leqslant j\leqslant l} \in M_{n,l}(\mathbb{K})$. Gdzie $c_{ij} := \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}$. Oznaczamy $C := A \cdot B$.

Przykład 27. Nad ciałem $\mathbb{F}_7$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Przykład 28. Nad ciałem $\mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 1 \\ 8 & 2 & 2 \\ 0 & 9 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19 & 16 & 13 \\ 24 & 31 & 14 \\ 24 & 21 & 6 \\ 7 & 92 & 86 \end{pmatrix}$$

Uwaga 29. *Mnożenie macierzy* ***nie jest*** *przemienne!*

Przykład 30. Nad ciałem $\mathbb{F}_7$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 6 & 6 & 3 \\ 6 & 0 & 6 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \\ 6 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Uwaga 31. *Własności mnożenia macierzy:*

- $A \cdot (B \cdot C) = A \cdot (B \cdot C)$*;*
- $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$*;*
- $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$*;*
- $a \cdot (A \cdot B) = (a \cdot A) \cdot B = A \cdot (a \cdot B)$ *dla* $a \in \mathbb{K}$*;*

Oznaczmy:

$$I_n := I := \mathbb{1}_n := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in M_{n,n}(\mathbb{K})$$

Uwaga 32. *Dla dowolnej macierzy $A \in M_{n,m}(\mathbb{K})$ zachodzi $I_m \cdot A = A$ oraz $A \cdot I_n = A$.*

Definicja 33. Niech $A = (a_{i,j}) \in M_{n,m}(\mathbb{K})$ będzie dowolną macierzą. Macierzą transponowaną A^T nazywamy macierz $A^T := (a_{ji}) \in M_{m,n}(\mathbb{K})$.

Uwaga 34. *Dla dowolnych macierzy A, B zachodzi $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.*

Niech $\mathcal{U}$ będzie układem równań liniowych

$$(\mathcal{U}) : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

oznaczmy

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \qquad X := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Wówczas układ $\mathcal{U}$ możemy zapisać w postaci $A \cdot X = B$.

Twierdzenie 35. *Niech $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ będzie macierzą kwadratową, wówczas następujące warunki są równoważne:*

- *istnieje macierz $B \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ taka, że $A \cdot B = I$;*
- *istnieje macierz $B \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ taka, że $B \cdot A = I$;*
- *$r(A) = n$;*
- $\det(A) \neq 0$.

Macierz spełniającą dowolny (a zatem wszystkie) z powyższych warunków nazywamy macierzą *odwracalną*. Zbiór wszystkich macierzy odwracalnych oznaczamy $GL_n(\mathbb{K})$. Macierz B o której mowa w pierwszych dwóch warunkach nazywamy *macierzą odrotną* do macierzy A i oznaczamy A^{-1}.

Twierdzenie 36 (Cauchy)**.** *Niech $A, B \in M_{n,n}(\mathbb{K})$, wówczas* $\det(A \cdot B) = \det(A)\det(B)$.

Wniosek 37. *Jeżeli macierze A, B są odwracalne, to macierze A^T, B^T, A^{-1}, B^{-1}, $A \cdot B$, $B \cdot A$ też są odwracalne.*

Uwaga 38. *Niech $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ będzie macierzą współczynników układu równań liniowych $A \cdot X = B$. Układ ten ma dokładnie jedno rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy macierz A jest odwracalna. Ponadto rozwiązanie to dane jest wzorem $X = A^{-1} \cdot B$.*

Algorytmy znajdowania macierzy odrotnej. Niech $A = (a_{i,j}) \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ będzie macierzą odwracalną (tj. $\det A \neq 0$).

Uwaga 39. *Macierz odwrotna A^{-1} ma postać*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\Big((-1)^{i+j}\det(A_{ji})\Big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$$

gdzie A_{ji} oznacza macierz powstałą z macierzy A poprzez skreślenie j-tego wiersza oraz i-tej kolumny.

Przykład 40. Rozważmy macierz

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

wówczas $\det(A) = -2 \neq 0$, czyli A jest odwracalna. Obliczamy

$$\begin{aligned} A^{-1} &= -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \det\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right) & -\det\left(\begin{smallmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right) & \det\left(\begin{smallmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \\ -\det\left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{smallmatrix}\right) & \det\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{smallmatrix}\right) & -\det\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{smallmatrix}\right) \\ \det\left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{smallmatrix}\right) & -\det\left(\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{smallmatrix}\right) & \det\left(\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{smallmatrix}\right) \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & -5 & 4 \\ 2 & 8 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{5}{2} & -2 \\ -1 & -4 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Za pomocą przekształceń elementarnych. Sprowadzamy wyjściową macierz do postaci jednostkowej. Następnie *te same przekształcenie* stosujemy *w tej samej kolejności* na macierzy jednostkowej. W wyniku uzyskujemy macierz odwrotną. Dopuszczalne są te same przekształcenia co w przypadku metody Gaussa (tj. tylko na wierszach).

Przykład 41. Rozważmy macierz

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Dokonujemy przekształceń elementarnych:

$$\begin{pmatrix}1&3&2\\2&0&0\\3&1&1\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \cdot\frac{1}{2}\\ \\\end{matrix}\rightsquigarrow\begin{pmatrix}1&3&2\\1&0&0\\3&1&1\end{pmatrix}\begin{matrix}-II\\ \\-3\cdot II\end{matrix}\rightsquigarrow\begin{pmatrix}0&3&2\\1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{matrix}-2\cdot III\\ \\ \\\end{matrix}\rightsquigarrow$$

$$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\-I\end{matrix}\rightsquigarrow\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\updownarrow\rightsquigarrow\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Teraz dokonujemy tych samych przekształceń na macierzy jednostkowej:

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \cdot\frac{1}{2}\\ \\\end{matrix}\rightsquigarrow\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{matrix}-II\\ \\-3\cdot II\end{matrix}\rightsquigarrow\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{2}&0\\0&-\frac{3}{2}&1\end{pmatrix}\begin{matrix}-2\cdot III\\ \\ \\\end{matrix}\rightsquigarrow$$

$$\begin{pmatrix}1&\frac{5}{2}&-2\\0&\frac{1}{2}&0\\0&-\frac{3}{2}&1\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\-I\end{matrix}\rightsquigarrow\begin{pmatrix}1&\frac{5}{2}&0\\0&\frac{1}{2}&0\\-1&-4&3\end{pmatrix}\updownarrow\rightsquigarrow\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}&0\\1&\frac{5}{2}&0\\-1&-4&3\end{pmatrix}$$

13. Macierz homomorfizmu

Definicja 42. Niech V, W będą dwiema przestrzeniami liniowymi nad ciałem $\mathbb{K}$, niech dalej $\mathcal{V} = (v_1, \ldots, v_n)$ będzie bazą przestrzeni V oraz $\mathcal{W} = (w_1, \ldots, w_m)$ będzie bazą przestrzeni W. Macierzą homomorfizmu $\varphi : V \to W$ w bazach $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ nazywamy macierz $M_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\varphi) := (a_{ij})$, gdzie $\varphi(v_j) = a_{1j}w_1 + \cdots + a_{mj}w_m$ dla każdego $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Uwaga 43. *Przy oznaczeniach jak wyżej, jeśli $[x_1, \ldots, x_n]_{\mathcal{V}}$ są współrzędnymi wektora $v \in V$ w bazie $\mathcal{V}$, to współrzedne jego obrazu $\varphi(v)$ w bazie $\mathcal{W}$ są równe:*

$$\begin{bmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_m\end{bmatrix}_{\mathcal{W}} = M_{\mathcal{V},C\mathcal{W}}(\varphi)\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}_{\mathcal{V}}$$

Uwaga 44. *Odwrotnie, jeżeli $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, to odwzorowanie $\psi : V \to W$ zadane wzorem:*

$$\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}_{\mathcal{V}} \mapsto \begin{bmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_m\end{bmatrix}_{\mathcal{W}} := A\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}_{\mathcal{V}}$$

jest homomorfizmem.

Homomorfizmy i mnożenie wektorów przez macierze to jest **to samo**.

Uwaga 45. *Jeżeli* $\varphi : V \to W$ *jest homomorfizmem, to* $\dim \operatorname{im} \varphi = r\Big(M_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\varphi)\Big)$.

Stwierdzenie 46. *Jeżeli* U, V, W *są przestrzeniami liniowymi,* $\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W}$ *bazami tych przestrzeni oraz* $\varphi : U \to V$, $\psi : V \to W$ *homomorfizmami, to*

$$M_{\mathcal{U},\mathcal{W}}(\psi \circ \varphi) = M_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\psi) \cdot M_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(\varphi)$$

Wniosek 47. *Homomorfizm* $\varphi : V \to W$ *jest izomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy jego macierz* $M_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\varphi)$ *jest odwracalna. Ponadto* $M_{\mathcal{W},\mathcal{V}}(\varphi^{-1}) = M_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\varphi)^{-1}$.

Podstawowe epimorfizmy. (Wszystkie przykłady w bazie standardowej)

rzutowanie: $\pi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zadane $\pi_1([x, y]) := [x, 0]$, wówczas $M(\pi_1) := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$;

homotetia: $h_a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o skali $a \in \mathbb{R}$ zadana $h_a([x, y]) := [ax, ay]$, wówczas $M(h_a) := \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right)$;

obrót: $O_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o kąt α zadany

$$O_\alpha([x, y]) := [x \cos\alpha - y \sin\alpha, x \sin\alpha + y \cos\alpha],$$

wówczas $M(O_\alpha) := \left(\begin{smallmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{smallmatrix}\right)$;

14. Wektory i wartości własne

Definicja 48. Załóżmy, że $\varphi : V \to V$ jest endomorfizmem przestrzeni liniowej V (nad ciałem $\mathbb{K}$). Wektor $v \in V \setminus \{\Theta\}$ nazywamy wektorem własnym endomorfizmu φ jeżeli istnieje skalar $a \in \mathbb{K}$ taki, że $\varphi(v) = av$. Skalar a nazywamy wtedy *wartością własną* endomorfizmu φ należącą do wektora własnego v.

Definicja 49. Niech φ, V będą j.w., podprzestrzeń $U \subseteq V$ przestrzeni V nazywamy *podprzestrzenią niezmienniczą* endomorfizmu φ jeżeli $\varphi(U) \subseteq U$.

Uwaga 50. *Wektor* v *jest wektorem własnym wtedy i tylko wtedy, gdy* $\operatorname{lin}(v)$ *jest podprzestrzenią niezmienniczą.*

Uwaga 51. *Jeżeli* U *jest podprzestrzenią niezmienniczą endomorfizmu* φ*, to* $\varphi|_U$ *jest endomorfizmem przetrzeni* U.

Przykład 52.

- dowolna przestrzeń V jest podprzestrzenią niezmienniczą każdego endomorfizmu na niej określonego;

- jądro i obraz endomorfizmu są podprzestrzeniami niezmienniczymi;
- niech $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie zadany $\varphi([x, y]) := [2x, x + y]$. Wówczas 2 jest wartością własną należącą do wektora własnego $[1, 0]$;
- obrót o kąt różny od zera na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ nie posiada wektorów własnych.

Twierdzenie 53. *Wektory własne odpowiadające różnym wartością własnym są liniowo niezależne.*

Wniosek 54. *Jeżeli $a_1, \ldots, a_n$ są wszystkimi, parami różnymi wartościami własnymi endomorfizmu $\varphi : V \to V$, to $n \leqslant \dim V$.*

Wniosek 55. *Jeżeli $\dim V = n$ oraz istnieje baza $\mathcal{V} = (v_1, \ldots, v_n)$ złożona z wektorów własnych, to macierz φ w tej bazie ma postać*

$$M_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\varphi) = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_2 & \ldots & 0 \\ \cdots & & & \\ 0 & 0 & \ldots & a_n \end{pmatrix}$$

gdzie $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ są (niekoniecznie różnymi) wartościami własnymi należącymi do wektorów własnych $v_1, \ldots, v_n$.

Twierdzenie 56. *Każdy endomorfizm przestrzeni liniowej określonej nad ciałem liczb zespolonych $\mathbb{C}$ posiada wartość własną.*

Twierdzenie 57 (Jordan). *Jeżeli $\varphi : V \to V$ jest endomorfizmem przestrzeni liniowej V nad ciałem $\mathbb{C}$, to istnieje baza $\mathcal{V}$ przestrzeni V, względem której φ ma macierz postaci:*

$$M_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\varphi) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & A_2 & \ldots & 0 \\ \cdots & & & \\ 0 & 0 & \ldots & A_k \end{pmatrix} \quad \textit{gdzie} \quad A_i = \begin{pmatrix} a_i & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_i & 1 & \ldots & 0 \\ \cdots & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_i \end{pmatrix}$$

Algorytm znajdowania wartości/wektorów własnych.

Definicja 58. *Wielomianem charakterystycznym* endomorfizmu $\varphi : V \to V$ nazywamy wielomian:

$$F_\varphi(x) := \det\Big(M_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\varphi) - x \cdot I\Big),$$

gdzie $\mathcal{V}$ jest dowolną bazą przestrzenie V.

Twierdzenie 59. *Skalar a jest wartością własną endomorfizmu φ wtedy i tylko wtedy, gdy $F_\varphi(a) = 0$.*

Twierdzenie 60. *Niech a będzie wartością własną endomorfizmu φ, wektor $v = [x_1, \ldots, x_n]_{\mathcal{V}}$ jest wektorem własnym związanym z a wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\Big(M_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\varphi) - a \cdot I\Big) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \Theta.$$