# XXXVIII OLIMPIADA FIZYCZNA ETAP WSTĘPNY
## Zadanie teoretyczne

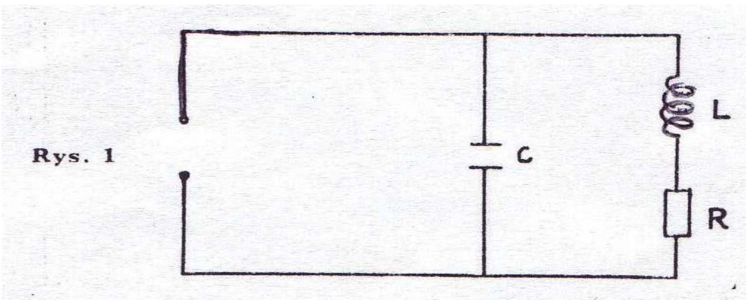
### Zadanie T1

**A.** Wykaż, że jeżeli liczby $a$ i $b$ spełnią równanie soczewki:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f} \qquad (f=\text{const})$$

to wszystkie proste przechodzące przez punkty ($a$,0) i (0,$b$) przecinają się w jednym punkcie. Wyznacz położenie tego punktu.

Jak wykorzystać powyższą własność w optyce geometrycznej?




**B.** Oblicz średnią moc pobieraną ze źródła napięcia sinusoidalnego przez obwód przedstawiony na rys.1. dane są $R,L,C$ i częstotliwość $\omega$ oraz napięcie źródła $U=U_0\cos\omega t$. straty mocy na promieniowanie zaniedbujemy.

**C.** Dwa jednakowe samochody A i B jadą po prostoliniowej, poziomej szosie z tą samą prędkością $\vec{v}$. W pewnej chwili samochód B zaczyna przyspieszać i po osiągnięciu prędkości $2\vec{V}$ dalej jedzie jednostajnie. Względem obserwatora nieruchomego w stosunku do szosy energia samochodu B wzrasta o $\Delta E_1=\frac{3}{2}mv^2$ (m-masa całego pojazdu).

Natomiast względem kierowcy samochodu A energia kinetyczna samochodu B wzrosła o $\Delta E_2=\frac{1}{2}mv^2$.

Ilość paliwa spalonego przez samochód B w czasie przyspieszania nie zależy oczywiście od obserwatora-jest ona taka sama i dla obserwatora nieruchomego względem szosy i dla obserwatora nieruchomego względem samochodu A (kierowca tego samochodu). Jednakże przyrost energii samochodu z punktu widzenia obu obserwatorów jest różny. Czyżby ciepło spalania benzyny zależało od obserwatora?

Wyjaśnij ten paradoks.

Wszelkie opory ruchu należy uznać za bardzo małe. Rozważania należy uzasadnić szczegółowym rachunkiem.

## ROZWIĄZANIE ZADANIA T1

A) Prosta przechodząca przez punkty (a,0) i (0,b) ma postać

$$y=\alpha x+\beta$$

gdzie $\alpha$ i $\beta$ są stałymi, które należy wyznaczyć korzystając z warunku, że punkty (a,0) i (0,b) mają spełniać powyższe równanie. Bez trudu znajdujemy, że

$$\alpha = \frac{b}{a}, \qquad \beta = b$$

zatem

$$y = -\frac{b}{a}x + b$$

ale z założenia

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \qquad (*)$$

stąd

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{f} - \frac{1}{b} = \frac{b-f}{bf}$$

Wobec tego

$$y = \frac{f-b}{f}x + b \qquad (**)$$

Jest to równanie prostej przechodzącej przez punkty (a,0) i (0,b) przy założeniu, że a i b spełniają warunek (*).

Zauważamy, że dla x=f mamy

$$y = \frac{f-b}{f}f + b = f - b + b = f$$

Widzimy, że niezależnie od a i b dla x=f rzędna y=f. zatem punkt (f,f) leży na każdej z prostych danych równaniem (**).Innymi słowy wszystkie proste (**) przecinają się w punkcie (f,f).

Omówioną własność można wykorzystać w optyce geometrycznej do dyskusji równania soczewki.

B. Jedynym elementem układu, na którym może zachodzić dyssypacja energii Jest opornik R. Moc wydzielana (średnia) w obwodzie jest równa

$$P = I_{sk}^2 R$$

gdzie $I_{sk}$ jest natężeniem skutecznym prądu płynącego przez gałąź zawierającą I,R. Podstawiając

$$I_{sk}^2 = \frac{U_{sk}}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}$$

gdzie $U_{sk} = \frac{1}{\sqrt{2}}U_0$ , dostajemy

$$P = \frac{1}{2}\frac{U_0^2 R}{R^2 + L^2\omega^2}$$

Warto zwrócić uwagę na fakt, że w przedstawionym obwodzie kondensator zupełnie nie wpływa na wielkość P.

Należy spodziewać się, że część uczniów będzie rozwiązywać powyższe zadania korzystając z liczb zespolonych. W związku z tym podajemy dodatkowe rozwiązanie, w którym wykorzystano pojęcie impedancji.

Niech Z oznacza całkowitą impedancję obwodu. Mamy:

$$\frac{1}{Z} = C\omega i + \frac{1}{L\omega i + R}$$

stąd

$$\frac{1}{Z} + \frac{R + Ai}{R^2 + L^2\omega^2}$$

gdzie A jest wielkością rzeczywistą zależną od R, L i C, której- jak się okazuje- nie trzeba wymierzać. Moduł odwrotności zawady i faza $\varphi$ odwrotności zawady są dane wzorami

$$\left|\frac{1}{Z}\right| = \frac{\sqrt{R^2 + A^2}}{R^2 + L^2\omega^2}$$

$$\cos\varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + A^2}}$$

Średnia moc wydzielana w obwodzie jest równa

$$P = U_{sk} I_{sk} \cos\varphi = U_{sk}^2 \left|\frac{1}{Z}\right| \cos\varphi = \frac{1}{2}\frac{RU_0^2}{R^2 + L^2\omega^2}$$

(wyraz zawierający A ulega skróceniu).

**C)** W obliczeniach należy uwzględnić energie kinetyczną Ziemi.
W układzie odniesienia, którym Ziemia początkowo spoczywała a samochody poruszały się z prędkościami V, zgodnie z prawem zachowania pędu, mamy

$$2mv=m(2v+u)+mv+Mu$$

gdzie M oznacza masę Ziemi, a u-jej prędkość po rozpędzeniu się samochodu B do prędkości 2V

Wyraz po lewej stronie oznacza pęd (łączny) obu samochodów poruszających się z tą samą prędkością. Pierwsze dwa wyrazy po prawej stronie oznaczają pędy samochodów B i A po rozpędzeniu się samochodu B do prędkości 2t. Ostatni wyraz oznacza pęd Ziemi po rozpędzeniu się samochodu B do prędkości 2v.
Stąd

$$u = -v\frac{m}{M + m}$$

ponieważ m<M, więc

$$|u| < |v|$$

Praca L wykonana przez silnik samochodu B równa zmianie energii układu, wynosi

$$L = \frac{1}{2}m(2v + u)^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Mu^2 - 2\frac{1}{2}mv^2$$

Zatem po podstawieniu u(v) dostajemy

$$L = \frac{3Mmv^2}{2(M+m)}$$

Weźmy teraz pod uwagę układ odniesienia związany z samochodem A. W układzie tym oba samochody spoczywają a Ziemia porusza się z prędkością- v. Z prawa zachowania pędu mamy

$$-Mv=Mw+m(2v+w)$$

gdzie w oznacza prędkość Ziemi po rozpędzeniu się samochodu B do prędkości 2v.

Lewa strona oznacza pęd całkowity układu Ziemia+samochody na początku, równy pędowi Ziemi na początku. Prawa strona wyraża końcowy pęd układu równy pędowi samochodu B i końcowemu pędowi Ziemi.

Stąd

$$w = -\frac{M+2m}{M+m}v$$

Praca wykonana przez silnik jest równa różnicy energii kinetycznych:

$$L' = \frac{1}{2}Mw^2 + \frac{1}{2}m(2v+w) - \frac{1}{2}Mv^2$$

Po podstawieniu zależności w(v) otrzymujemy

$$L' = \frac{3Mmv^2}{2(M+m)}$$

a więc wartość dokładnie taką samą jak dla poprzedniego obserwatora. Dla M>m mamy w obu przypadkach

$$L \approx \frac{3}{2}mv^2$$

Widzimy, że uwzględnienie energii kinetycznej Ziemi usuwa paradoks przedstawiony w treści zadania. Paradoks ten był skutkiem pominięcia energii kinetycznej Ziemi w przypadku obserwatora związanego z kierowcą samochodu A.

UWAGA: Przy uwzględnieniu skończonej masy Ziemi i związanej z tym możliwości zmiany ruchu Ziemi podczas rozpędzania się samochodu niektóre wielkości, proste i jednoznaczne w przypadku Ziemi nieskończenie ciężkiej, wymagają przyjęcia pewnej interpretacji. Np. w zadaniu mówi się, że prędkość samochodu A względem Ziemi jest równa v. Otóż jeżeli samochód B rozpędza się i nadaje Ziemi pewną prędkość wstecz, to aby prędkość samochodu A względem Ziemi pozostała równa v, samochód ten musiałby nieco przyhamować. Należy więc zdecydować się, jak należy prędkość v rozumieć. Uwzględniając tego rodzaju niuanse można znaleźć kilka racjonalnych interpretacji wielkości występujących w zadaniu. Oczywiście w granicznym przypadku, gdy masa Ziemi M dąży do nieskończoności, dają one ten sam wynik. Interpretacja przyjęta w niniejszym rozwiązaniu (prędkość 2v liczona względem Ziemi, samochód A nie hamuje) wydaje się najbardziej naturalna. Należy jednak zdawać sobie sprawę z tego, że możliwe są inne, równie poprawne, interpretacje prędkości w przypadku, gdy Ziemia może zmieniać swój ruch.

W zadaniu dla uproszczeniu przyjęto, że Ziemia jest płaska. Oczywiście nie narusza to istoty rozważań.

Źródło:
Zadanie pochodzi z „Druk OF”