

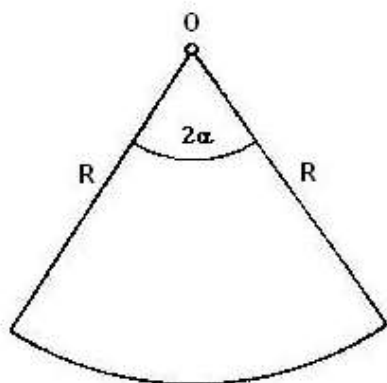
XXXVIII OLIMPIADA FIZYCZNA ETAP I

Zadania teoretyczne

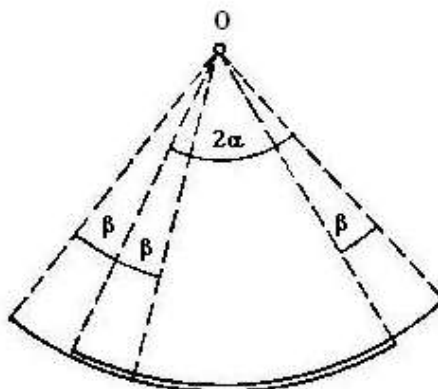
ZADANIE T5

Nazwa zadania: „Wahadło”

Cienki pręt w kształcie łuku o promieniu R wisi na nitkach o długości R tak, jak na rysunku 31. Kąt między nitkami wynosi 2α . Wyznacz okres małych drgań opisanego wahadła (drgania w płaszczyźnie rysunku wokół punktu O).



Rys. 31



Rys. 32

ROZWIĄZANIE ZADANIA T5

Wychylenie układu z położenia równowagi o mały kąt β powoduje pojawianie się niezerównoważonej siły równej ciężarowi pręta zgiętego w łuk o kącie środkowym 2α . Na rysunku 32 wychylony i nie wychylony pręt ze względów graficznych nieco rozsunięto w pionie. Gęstość liniowa pręta wynosi ζ , a jego masa

$$M = 2aR\zeta \quad (1)$$

Moment bezwładności pręta względem punktu O dany jest wzorem

$$I = MR^2 = 2a\zeta R^3 \quad (2)$$

Masa niezerównoważonej części pręta wynosi

$$m = 2\beta \zeta R$$

a jej ciężar

$$F = 2\beta \zeta Rg \quad (3)$$

Moment siły ciężkości niezerównoważonej części pręta względem punktu O

$$N = FR \sin \alpha = 2\beta \zeta R^2 g \sin \alpha \quad (4)$$

Możemy napisać równanie ruchu:

$$I\epsilon = -N \quad (5)$$

gdzie

$$\varepsilon = \frac{d^2\beta}{dt^2}, \varepsilon - \text{przyspieszenie kątowe} \quad (6)$$

Znak minus oznacza, że moment siły \mathbf{N} działa tak, aby zmniejszyć kąt β .
Wstawiając do równania (5) zależności (2), (4) otrzymamy

$$2a\zeta R^2\varepsilon = -2\beta\zeta R^2g \sin a \quad (7)$$

Stąd

$$\varepsilon = -\frac{g \sin a}{aR} \beta$$

$$\frac{d^2\beta}{dt^2} = -\frac{g \sin a}{aR} \beta$$

$$\frac{d^2\beta}{dt^2} = -\omega^2 \beta \quad (8)$$

gdzie

$$\omega^2 = \frac{g \sin a}{aR} \quad (9)$$

Równanie (8), jest równaniem ruchu rozpatrywanego wahadła, którego drgania zachodzą z częstością ω spełniającą warunek (9).

Stąd szukany okres drgań tego wahadła

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{aR}{g \sin a}} \quad (10)$$

Okres drgań nie zależy do masy pręta, a jedynie od długości nici R i kąta $2a$ zawartego między nimi.

Warto zauważyć, że dla $a \rightarrow 0$ otrzymany wzór (10) na okres drgań przechodzi we wzór dla wahadła matematycznego. Natomiast dla $a \rightarrow \pi$, okres wahań dąży do nieskończoności, tzn. w ogóle nie będzie występowały wahania, ponieważ nie występuje moment kierujący.

(brak punktacji)

Źródło:
Zadanie pochodzi z czasopisma „Fizyka w Szkole”

Komitet Główny Olimpiady Fizycznej w Szczecinie
www.of.szc.pl