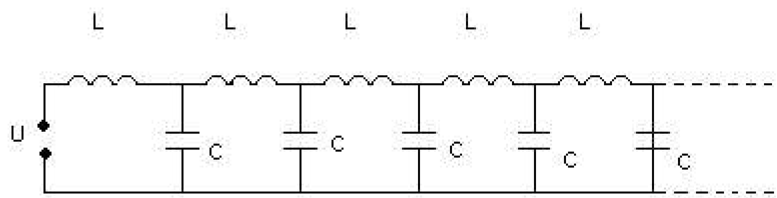
XXXVIII OLIMPIADA FIZYCZNA ETAP I
Zadanie teoretyczne

ZADANIE T3

Rozważając obwody prądu zmiennego wygodnie jest posługiwać się pojęciem impedancji. Impedancja jest wielkością zespolona: oporowi R przypisuje się impedancję $Z_R = R$, cewce o indukcyjności L –impedancję $Z_L = L\omega i$ a kondensatorowi o pojemności C –impedancję $Z_C = 1/C\omega i$, gdzie $i^2 = -1$ a ω jest częstotliwością kołową prądu. Impedancje zastępczą oblicza się według takich samych wzorów jak opór zastępczy. Wartość bezwzględna impedancji, zwana zawadą, jest równa stosunkowi wartości skutecznych napięcia do natężenia.
Faza impedancji jest równa przesunięciu fazowemu między chwilowymi wartościami napięcia i natężenia.

Korzystając z powyższych informacji wyznacz wartość skuteczną natężenia prądu pobieranego ze źródła w obwodzie złożonym z nieskończenie wielu jednakowych oczek przedstawionych na ryc. 9. Napięcie U zmienia się według wzoru

$$U = U_0 \cos \omega t$$

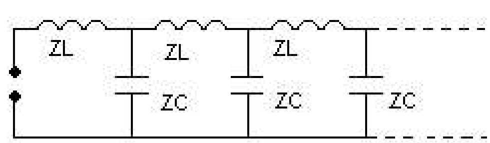


ryc. 9

Przyjmujemy, że opór omowy R cewek jest znikomy.

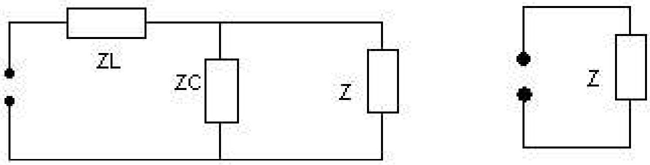
ROZWIĄZANIE ZADANIA T3

Przedstawiony na ryc. 10. obwód można przedstawić



Ryc. 10

W postaci następującej (ryc. 11) :



ryc. 11

Wypadkowa zawada Z reprezentuje zawadę całego nieskończonego obwodu. Ze względu na to, że obwód zawiera nieskończoną ilość „oczek” dostajemy równanie:

$$Z = Z_L + \frac{1}{\frac{1}{Z_C} + \frac{1}{Z}} \tag{1}$$

Równanie (1) sprowadza się do równania kwadratowego na Z

$$Z^2 - Z_L Z - Z_L Z_C = 0 \tag{2}$$

Według treści zadania

$$Z_C = \frac{1}{i\omega C} \ , \qquad Z_L = i\omega L + R \ ,$$

gdzie R jest małym (znikomym) oporem omowym cewek . Rozwiązaniem równania kwadratowego (2) jest:

$$Z = \frac{1}{2}\left[Z_L \pm \sqrt{Z_L^2 + 4Z_L Z_C}\right] = \frac{1}{2}\left[i\omega L + R \pm \sqrt{-L^2\omega^2 + R^2 + 4\frac{L}{C} + 2RL\omega i - \frac{4R}{\omega C}i}\right] .$$

Dla $L \to 0$ i C $\to \infty$ mamy:

$$Z = \frac{1}{2}\left[R \pm \sqrt{R^2}\right].$$

Widać stąd, że należy wybrać znak +. Stąd zawada obwodu dana jest wzorem

$$Z = \frac{1}{2}\left[i\omega L + R + \sqrt{-L^2\omega^2 + R^2 + 4\frac{L}{C} + 2R\omega i - \frac{4R}{\omega C}i}\right]$$

a dla $R \to 0$

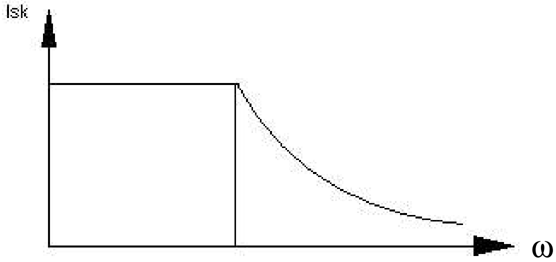
$$Z = \frac{1}{2}\left[i\omega L + \sqrt{-L^2\omega^2 + 4\frac{L}{C}}\right] . \tag{3}$$

Dla dużych częstości, tzn. dla $\omega > \sqrt{\frac{4}{LC}}$ wyrażenie pod pierwiastkiem we wzorze (3) jest dodatnie.

Wówczas:

$$I_{sk} = \frac{U_{sk}}{Z} = \frac{2U_0}{\sqrt{2}\left[(\omega L)^2 + (4L/C)^2 - \omega^2 L^2\right]^{1/2}} = \frac{U_0}{\sqrt{2}2L/C}$$

Wykres I_{sk} w funkcji częstości ω przedstawia ryc. 12.



ryc. 12

Źródło:
Zadanie pochodzi z „Druk OF”

Komitet Okręgowy Olimpiady Fizycznej w Szczecinie
www.of.szc.pl