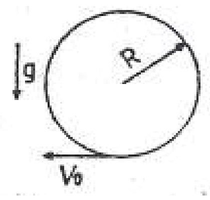
XXXVIII OLIMPIADA FIZYCZNA ETAP I
Zadanie teoretyczne

ZADANIE T2

Nazwa zadania: „Piłka na obręczy”
Mała jednorodna kulka może poruszać się bez tarcia w płaszczyźnie pionowej ograniczonej nieruchomą ścianką w kształcie obręczy kołowej o promieniu R.
Kulka porusza się w jednorodnym polu grawitacyjnym równoległym do płaszczyzny obręczy. Zderzenia kulki ze ścianką są doskonale sprężyste. Kulkę wprawiamy w ruch z prędkością υ_0 równoległe do ścianki obręczy w najniższym jej punkcie – ryc.6.



ryc. 6.

a) Oblicz, dla jakich prędkości υ_0 ruch kulki będzie okresowy bez odrywania się kulki od ścianki.
b) Oblicz przynajmniej jedną wartość prędkości υ_0, dla której ruch kulki będzie okresowy, przy czym kulka odbijać się od obręczy.
c) Naszkicuj tor przynajmniej jeszcze jednego ruchu okresowego, w którym kulka odbija się od ścianek. Uzasadnij odpowiedź (jakościowo).

ROZWIĄZANIE ZADANIA T2

Ruch okresowy bez odrywania się od ścianki będzie zachodził dla takich prędkości początkowych, przy których kulka będzie mogła zatoczyć pełny okrąg oraz dla takich, przy których kulka zatoczy mnie niż ¼ okręgu.

a) Ruch okresowy oscylacyjny zachodzi dla takich prędkości początkowych, dla których początkowa energia kinetyczna jest nie większa od energii potencjalnej na wysokości R.

$$\frac{1}{2}m\upsilon_0^2 \leq mgR$$

stąd

$$\upsilon_0 \leq \sqrt{2gR} \tag{1}$$

b) Ruch obiegowy po okręgu, periodyczny zachodzi dla takich prędkości początkowych υ_0, dla których przyspieszenie dośrodkowe w najwyższym punkcie jest nie mniejsze niż przyspieszenie ziemskie

$$\frac{\upsilon^2}{R} \geq g \ .$$

Z zasady zachowania energii możemy wyznaczyć związek między prędkością υ w najwyższym punkcie okręgu a prędkością początkową υ_0

$$mg \cdot 2R + \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{m\upsilon_0^2}{2} \ .$$

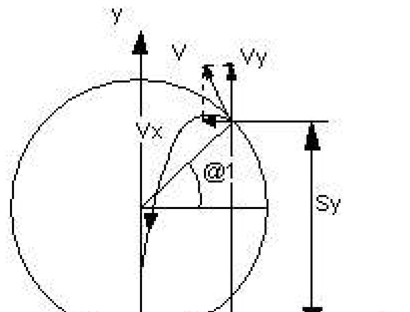
Skąd otrzymujemy szykany warunek

$$\upsilon_0 \geq \sqrt{5gR} \qquad (2)$$

Tak więc ruch kulki będzie periodyczny dla

$0 \leq \upsilon_0 \leq \sqrt{2gR}$ i dla $\upsilon_0 \geq \sqrt{5gR}$.

Ruch periodyczny z odbiciami od ścianek, w którym łatwo można znaleźć prędkość początkową υ_0, przedstawia, ryc. 7. Gdy odbicie następuje w najniższym punkcie obręczy, obie parabole ruchu swobodnego (przed i po odbiciu) są symetryczne względem pionowej średnicy obręczy. Oznaczmy przez s_x i s_y składowe pozioma i pionową drogi przebywanej przez kulkę po paraboli. Oderwanie się kulki od obręczy następuje przy kącie α_1



ryc. 7.

Mamy

$$s_x = R\cos\alpha_1 \ ,$$
$$s_y = -R(1+\sin\alpha_1) \ .$$

Obliczamy czas , po którym kulka osiągnie punkt odbicia. Ponieważ w spadku swobodnym przebyta droga dana jest wzorem

$$s_y = \upsilon_y t - \frac{gt^2}{2}$$

znajdujemy

$$t = \frac{\upsilon \cos\alpha_1}{g} + \sqrt{\frac{\upsilon^2 \cos^2 \alpha_1}{g^2} + \frac{2R(1+\sin\alpha_1)}{g}} \qquad (3)$$

W tym samym czasie kulka przebywa drogę

$$s_x = R\cos\alpha_1$$

w ruchu jednostajnym z prędkością

$$\upsilon_x = \upsilon \sin\alpha_1 \ .$$

Stąd

$$\upsilon \sin\alpha_1 \cdot t = R\cos\alpha_1 \qquad (4)$$

W chwili oderwania się od ścianek przyspieszenie dośrodkowe równa się składowej przyspieszenia ziemskiego:

$$\frac{\upsilon^2}{R} = g\sin\alpha_1 \ . \qquad (5)$$

Z równań (3), (4) i (5) możemy wyeliminować υ i t otrzymując równanie na $\sin\alpha_1$

$$2\,(\sin\alpha_1)^2 + \sin\alpha_1 - 1 = 0$$

stąd

$$\sin\alpha_1 = ½ \ , \quad -1 \ .$$

Pierwszy pierwiastek ($\sin\alpha_1$ = ½) daje poszukiwane rozwiązanie

$$\alpha_1 = \pi/6 = 30°$$

Wstawiając tę wartość do (5) możemy obliczyć prędkość kulki w chwili oderwania się od obręczy

$$\upsilon = \sqrt{\frac{gR}{2}} \ .$$

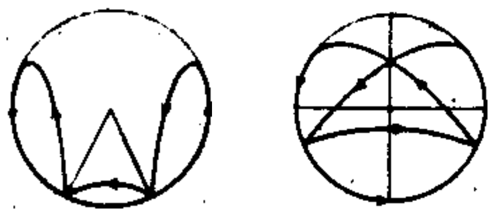
Z zasady zachowania energii obliczamy teraz prędkość początkową, która prowadzi do oderwania kulki od obręczy w punkcie $\alpha = \alpha_1$ z prędkością υ_0

$$\frac{1}{2} m\upsilon_0^2 = \frac{1}{2} m \frac{gR}{2} + \frac{3}{2} mgR$$

stąd

$$\upsilon_0 = \sqrt{\frac{7}{2} gR} \ .$$

c) Inne tory ruchu periodycznego ryc.8.



ryc. 8.

Źródło:
Zadanie pochodzi z „Druk OF”

Komitet Okręgowy Olimpiady Fizycznej w Szczecinie
www.of.szc.pl