XXXVIII OLIMPIADA FIZYCZNA ETAP III
Zadanie teoretyczne

ZADANIE T3

Nazwa zadania: „Prawdopodobieństwo obrotów ciała sztywnego"

Ciało sztywne o masie *m* może obracać się wokół ustalonej poziomej osi, a jego moment bezwładności względem tej osi wynosi *I*. Środek masy ciała znajduje się w odległości *L* od osi. W osi działają na ciało siły tarcia, przy czym moment *T* sił tarcia kinetycznego (poślizgowego) jest stały i równy maksymalnemu momentowi sił tarcia statycznego. Wartość *T* jest dana i nie jest ona wystarczająco duża, aby utrzymać ciało w równowadze w pozycji poziomej (to znaczy $T < mgL$); zatem ciało może spoczywać bądź w pozycji górnej (środek masy powyżej osi. w pewnym przedziale kątów), bądź w pozycji dolnej (środek masy poniżej osi, w pewnym przedziale kątów). W chwili początkowej nadano ciału przypadkowo wybraną energię ruchu obrotowego. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że ciało:

a) zatrzyma się w pozycji górnej,
b) zatrzyma się i cofnie do pozycji dolnej,
c) zatrzyma się w pozycji dolnej bez cofania,

jeśli prawdopodobieństwo tego, że nadano dowolną energię *E*-z przedziału $E_{min} < E < E_{max}$ nie zależy od *E* przy czym E_{max}-E_{min} » *T*. Zakładamy, że przed zatrzymaniem ciało wykonuje wiele obrotów. Dla jakich *T* może zachodzić przypadek c)?

ROZWIĄZANIE ZADANIA T3

Energia mechaniczna ciała dana jest wzorem

$$E = \frac{1}{2} I\omega^2 - mgL\cos\alpha \,,$$

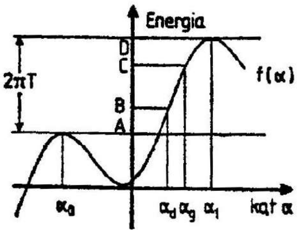
gdzie *α* jest katem obrotu liczonym od pozycji „w dół", a ω jest prędkością kątową. Zmiana (spadek) tej energii jest równa pracy sił tarcia, czyli $\Delta E = -T\Delta\alpha$, dopóki *α* rośnie. Stąd znajdujemy prawo

$$\frac{1}{2} I\omega^2 - mgL\cos\alpha + T\alpha = E_p \,,$$

gdzie E_p jest energią początkową ciała.

Oznaczmy $f(\alpha) = T\alpha - mgL\cos\alpha$ i wykonajmy wykres funkcji *f(α)* (ryc.4). Widzimy, że przy danej wartości E_p można z tego wykresu wyznaczyć kąt zatrzymania się ciała α_z. Należy zbadać, czy moment siły ciężkości $mgL|\sin\alpha_z|$ jest większy, czy mniejszy od *T*.

Jeśli jest większy, to znaczy $|\sin\alpha_z| > T/mgL$, to mamy przypadek b) i ciało cofnie się, a jeśli $|\sin\alpha_z| < T/mgL$, to ciało pozostanie w spoczynku i w zależności od znaku *cosα* mamy przypadek a) lub c).



Ryc. 4. Długość odcinka $AB=2\pi Tp_c$, długość odcinka $BC=2\pi Tp_b$, długość odcinka $CD=2\pi Tp_a$

Ze względu na warunek E_{max}-E_{min} » T można nie badać energii początkowych bliskich E_{max} lub E_{min}, gdyż nie wpływają one znacząco na szukane prawdopodobieństwa. Rozważmy jeden typowy zakres energii początkowych, od jednego maksimum α_0 funkcji f do następnego $\alpha_1= \alpha_0+2\pi$. Maksima te można wyznaczyć z przyrównania do zera pochodnej $f'(\alpha)=T+mgL\sin\alpha$, czyli $\sin\alpha=-T/mgL$. Nietrudno sprawdzić, że pierwsze maksimum na lewo od zera dane jest wzorem $\alpha_0=-\pi+\arcsin T/mgL$, a pierwsze maksimum na prawo od zera dane jest wzorem $\alpha_1=\pi+\arcsin T/mgL$. Wartości funkcji f *w* tych punktach wynoszą:

$$f(\alpha_0) = -\pi T + T\arcsin\frac{T}{mgL} + mgL\sqrt{1-\left(\frac{T}{mgL}\right)^2}$$

$$f(\alpha_1) = f(\alpha_0) + 2\pi T$$

(Nie badamy nieinteresującego minimum w punkcie $\alpha = -\arcsin T/mgL$.

Jeśli $E_p=f(\alpha_0)$ to ciało zatrzymuje się „w ostatnim momencie" w pozycji górnej, przy bardzo małym zwiększeniu E_p ciało zsuwa się w dół, a przy $E_p=f(\alpha_1)$ ciało wykonuje jeszcze jeden obrót i zatrzymuje się w tej samej pozycji.

Granicą równowagi w pozycji dolnej jest kąt. $\alpha_d = \arcsin T/mgL$. Należy sprawdzić, czy wartość funkcji f w tym punkcie jest większa czy mniejsza od $f(\alpha_0)$. Aby $f(\alpha_d)$ było mniejsze od $f(\alpha_0)$ musi zachodzić nierówność: $T<T_g$ gdzie:

$$T_g = mgL\sqrt{1+(\pi/2)^2} = 0{,}537\, mgL$$

Jeśli $T<T_g$ to ciało mające energię początkową większą od $f(\alpha_0)$ przeleci kąt α_d i będzie się musiało cofnąć (lub zatrzymać w pozycji górnej). Przypadek c) nie będzie zachodził. Jeśli $T>T_g$ to przypadek c) zachodzi dla E_p leżących w przedziale $f(\alpha_0)<E_p<f(\alpha_d)$. Podstawiając wartości $f(\alpha_0)$ i $f(\alpha_d)$ wyliczamy, że długość tego przedziału wynosi:

$$f(\alpha_d) - f(\alpha_0) = \pi T - 2mgL\sqrt{1-\left(\frac{T}{mgL}\right)^2}$$

a stąd prawdopodobieństwo:

$$p_c = \frac{1}{2\pi T}(f(\alpha_d) - f(\alpha_0)) = \frac{1}{2} - \frac{mgL}{\pi T}\sqrt{1-\left(\frac{T}{mgL}\right)^2}$$

dla $T>T_g$

Granicą równowagi w pozycji górnej jest kąt $\alpha_0=\pi-\arcsin T/mgL$. Łatwo można obliczyć, że:

$$f(\alpha_g) = \pi T - T\arcsin\frac{T}{mgL} + mgL\sqrt{1-\left(\frac{T}{mgL}\right)^2}$$

Zatrzymanie się ciała w pozycji górnej nastąpi wtedy, gdy $f(\alpha_g)<E_p<f(\alpha_1)$. Długość tego przedziału wynosi $f(\alpha_1)-f(\alpha_g)$, czyli prawdopodobieństwo zatrzymania w pozycji górnej wynosi:

$$p_a = \frac{1}{\pi}\arcsin\frac{T}{mgL}$$

Pozostałe możliwości to przypadek b). Widzimy, że dla $T<T_g$:

$$p_b = 1 - \frac{1}{\pi}\arcsin\frac{T}{mgL}$$

a dla $T>T_g$

$$p_b = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\arcsin\frac{T}{mgL} + \frac{mgL}{\pi T}\sqrt{1-\left(\frac{T}{mgL}\right)^2}$$

Są to szukane wzory na prawdopodobieństwa odpowiednich przypadków.

Źródło:
Zadanie pochodzi z czasopisma „Fizyka w Szkole"5/1989

Komitet Okręgowy Olimpiady Fizycznej w Szczecinie
www.of.szc.pl