XXXVIII OLIMPIADA FIZYCZNA ETAP III
Zadanie teoretyczne

ZADANIE T2

Nazwa zadania: „Przepływ ładunku w lampie elektronowej”

Lampa elektronowa (dioda) składa się z dwóch płaskich, równoległych do siebie elektrod o powierzchni S oddalonych od siebie o L. Odległość L jest dużo mniejsza od rozmiarów elektrod. Napięcie pomiędzy elektrodami wynosi U.

Wskutek termoemisji elektrony emitowane są z katody, a następnie poruszają się w kierunku anody w polu elektrycznym wywołanym różnicą potencjałów pomiędzy elektrodami oraz polem wytworzonym przez inne elektrony. Emisja elektronów z katody jest tak duża, że w żaden sposób nie ogranicza natężenia płynącego przez diodę prądu. W takiej sytuacji można przyjąć, że natężenie pola elektrycznego tuż przy katodzie wynosi zero i że prędkość elektronów tuż przy katodzie jest równa zeru. Udowodnij, że potencjał elektryczny V zależy od odległości x od katody zgodnie z prawem:

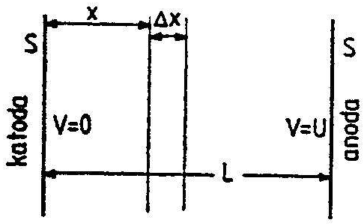
$$V(x) = U \cdot \left(\frac{x}{L}\right)^{4/3}$$

Wyznacz związek pomiędzy natężeniem prądu płynącego przez diodę a przyłożonym napięciem U. Czy spełnione jest prawo Ohma? Pomiń zderzenia pomiędzy elektronami oraz oddziaływanie elektronów z polem magnetycznym. Chmurę elektronów w diodzie można traktować jako ciągły rozkład ładunku.

ROZWIĄZANIE ZADANIA T2

Rozwiązanie zadania opiera się na dwóch prawach fizycznych. Pierwsze to związek pola elektrycznego E w danym punkcie z gęstością ładunku elektrycznego czyli prawo Gaussa. Drugie to zależność prędkości elektronów w danym punkcie od potencjału elektrycznego, czyli prawo zachowania energii mechanicznej.

Ze względu na to, że problem jest jednowymiarowy pole elektryczne zależy tylko od odległości od katody i jest skierowane od anody do katody. Oznaczmy przez $E(x)$ natężenie pola elektrycznego w punkcie odległym o x od katody. Pole to jest wytworzone przez ładunki na elektrodach i przez elektrony znajdujące się w obszarze pomiędzy katodą i anodą. Aby znaleźć wartość pola elektrycznego rozważmy dwie płaszczyzny równoległe do powierzchni elektrod (ryc. 3), odległe od katody o x oraz $x+\Delta x$.



Ryc.3. Dioda

Strumień pola elektrycznego przez powierzchnię ograniczoną tymi płaszczyznami wynosi $SE(x+\Delta x)-SE(x)$. Dla małych Δx strumień ten można przybliżyć przez

$$\frac{dE(x)}{dx}S\Delta x$$

Prawo Gaussa daje związek pomiędzy tym strumieniem a ilością ładunku elektrycznego Q zawartego pomiędzy płaszczyznami. Oznaczając przez *ρ(x)* gęstość ładunku elektrycznego znajdujemy $Q = \rho(x)S\Delta x$ Q=*q(x)SΔx.* A zatem:

$$\frac{dE(x)}{dx}S\Delta x = S\rho(x)\Delta x / \varepsilon_0$$

gdzie ε_0 jest przenikalnością dielektryczna próżni. Skracając przez *SΔx* dostajemy

$$\frac{dE(x)}{dx} = \rho(x)/\varepsilon_0$$

Jest to prawo Gaussa w postaci różniczkowej. Gęstość ładunku *ρ(x)* związana jest z natężeniem prądu *I* płynącego przez diodę oraz prędkością elektronów *u(x)* w danym punkcie *x* wzorem $I = S\rho(x)U(x)$. Natężenie prądu *I* musi być w każdym punkcie *x* takie samo zgodnie z prawem zachowania ładunku. A zatem $\rho(x) = I / Su(x)$. Prawo Gaussa przyjmuje więc postać:

$$\frac{dE(x)}{dx} = \frac{I}{Su(x)\varepsilon_0}$$

Natężenie prądu *I* jest nieznane i zostanie obliczone później. Wykorzystując związek między polem elektrycznym *E(x)* i potencjałem *V(x)*:

$$E(x) = \frac{dV(x)}{dx}$$

dostajemy równanie łączące potencjał *V(x)* z prędkością elektronów *u(x)*:

$$\frac{d^2V(x)}{dx^2} = -\frac{I}{Su(x)\varepsilon_0} \qquad (1)$$

Znajdziemy teraz związek pomiędzy prędkością elektronów *u(x)* a potencjałem pola elektrycznego *V(x)* korzystając z zasady zachowania energii mechanicznej. Prawo to zapiszemy w postaci:

$$mu^2(x)/2 + eV(x) = W$$

gdzie *m* jest masą, *e*— ładunkiem, a *W*— całkowita energią elektronu. Jeśli przyjmiemy, że wartość potencjału elektrycznego tuż przy katodzie jest równa zeru (co zawsze można zrobić, potencjał określony jest bowiem z dokładnością do stałej) to całkowita energia (kinetyczna i potencjalna) elektronu też wynosi zero. Jest tak dlatego, że tuż przy katodzie prędkość elektronu jest równa zeru. A zatem

$$mu^2(x)/2 + eV = 0$$

czyli $$u(x) = -\sqrt{\frac{-2eV(x)}{m}} \qquad (2)$$

(ładunek elektronu jest ujemny, a potencjał dodatni). Wstawiając tak obliczoną wartość prędkości *u(x)* do równania (1) dostajemy równanie, w którym występuje tylko potencjał:

$$\frac{d^2V(x)}{dx^2} = -\frac{I}{S\varepsilon_0}\sqrt{\frac{m}{-2eV(x)}} \qquad (3)$$

Sprawdzimy teraz, że podana w treści zadania funkcja

$$V(x) = U\left(\frac{x}{L}\right)^{4/3}$$

jest rozwiązaniem równania (3). Wykonując dwukrotne różniczkowanie znajdujemy:

$$\frac{4}{4}\frac{1}{3}UL^{-4/3}x^{-2/3} = -\frac{I}{S\varepsilon_0}\sqrt{\frac{m}{-2eU}}L^{-2/3}x^{-2/3} \qquad (4)$$

Z obu stron mamy tę samą zależność od *x*. A zatem równanie (4), a więc również i równanie (3) są spełnione dla wszystkich *x*, o ile tylko:

$$I = -\frac{4}{9}SE_0\sqrt{\frac{-2e}{m}}L^{-2/3}U^{3/2} \qquad (5)$$

Ponadto funkcja *V(x)* jest równa zeru dla *x* = 0, czyli na katodzie, oraz przyjmuje wartość *U* dla *x* = *L. czyli* na anodzie. Jest to więc warunek, który należało znaleźć w zadaniu. Równość (5) jest szukanym związkiem pomiędzy przyłożonym do elektrod napięciem *U* a natężeniem prądu płynącego przez diodę. Widzimy, że związek ten jest nieliniowy, nie jest więc spełnione prawo Ohma.

Źródło:
Zadanie pochodzi z czasopisma „Fizyka w Szkole”5/1989

Komitet Okręgowy Olimpiady Fizycznej w Szczecinie
www.of.szc.pl