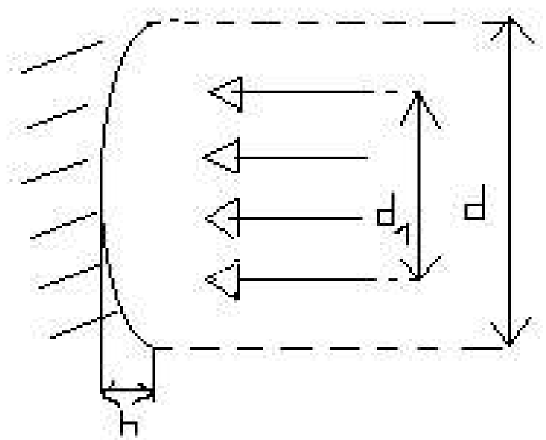
XXXVII OLIMPIADA FIZYCZNA ETAP I
Zadanie teoretyczne

ZADANIE T4

Nazwa zadania: „Optyka geometryczna”

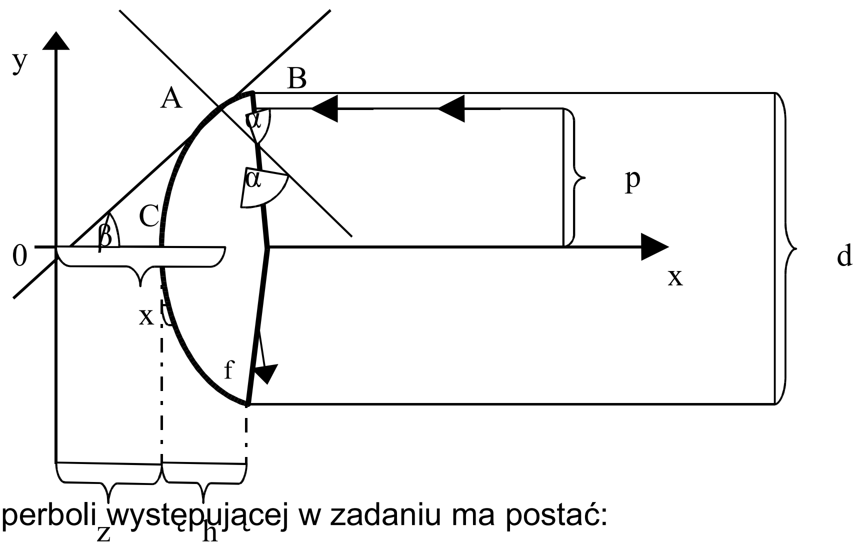
Na zwierciadło wklęsłe o średnicy d = 24cm i wysokości h = 8cm, mające kształt równoosiowej hiperboloidy obrotowej, wzdłuż osi symetrii pada równoległa wiązka światła o średnicy d_1 = 22cm.



Punkty przecięcia promieni odbitych od zwierciadła z osią symetrii wyznaczają na niej pewien odcinek. Wyznacz położenie końców tego odcinka.

ROZWIAZANIE ZADANIA T4

W rozwiązaniu zadania pomoże nam rysunek wykonany w układzie współrzędnych, na którym dokładnie rozrysujemy bieg promieni wzdłuż osi symetrii i ich odbicie od powierzchni wklęsłej zwierciadła.



Równanie hiperboli występującej w zadaniu ma postać:

$$x^2 - y^2 = a^2$$

gdzie a nie jest określone, możemy to zrobić wiedząc, że punkty B i C leżą na hiperboli, więc:

$$z^2 - 0^2 = a^2$$

$$\left((z+h)^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2\right) = a^2$$

Po podstawieniu odpowiednich wartości za d i h otrzymujemy, że

$z = a = 5$cm

Rozpatrzymy bieg promienia w odległości p od osi symetrii. Promień ten pada na zwierciadło w punkcie A = (x,p):

$$x^2 - p^2 = a^2$$
$$x = \sqrt{p^2 + a^2}$$

zatem

$$A = \left(\sqrt{p^2 + a^2}, p\right)$$

Kąt padania α tego promienia spełnia związek

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$$

przy czym

$$tg\beta = \frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

Po odbiciu promień ten przecina oś symetrii w odległości f od wierzchołka zwierciadła. Mamy

$$f = f_1 + x - z \qquad (*)$$

$$f_1 = p \cdot ctg2\alpha = p\frac{1 - tg^2\alpha}{2tg\alpha}$$

Wobec tego

$$tg\alpha = tg\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = ctg\beta = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x}$$

natomiast

$$f_1 = p\frac{1-\dfrac{x^2-a^2}{x^2}}{2\dfrac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}} = p\frac{a^2}{2x\sqrt{x^2-a^2}}$$

Ze związku(*) po uwzględnieniu wyrażenia na f_1 i skorzystaniu z równania hiperboli dostajemy

$$f = p\frac{a^2}{2x\sqrt{x^2-a^2}} + x - a = p\frac{a^2}{2\sqrt{p^2+a^2}\cdot p} + \sqrt{p^2+a^2} - a = \frac{3a^2+2p^2}{2\sqrt{a^2+p^2}} - a$$

f(p) jest funkcją rosnącą w interesującym nas przedziale p

Dla $p=0$: $f = \frac{1}{2}a = 2{,}5cm$ (wiązka jest przyosoiwa)

Dla $p=\frac{1}{2}$ $d_1 = 11cm$; $f \approx 8{,}1cm$

<u>Odpowiedź:</u>
Padająca wiązka promieni przecina oś symetrii zwierciadła w punktach odległych od wierzchołka o od 2,5cm do 8,1cm

Punktacja:

Czytelny rysunek	2 pkt.
Określenie a	1 pkt.
Wyznaczenie f(p)	4 pkt.
Monotoniczność f(p)	1 pkt.
Końce odcinka	2 pkt.
razem	10 pkt.

Źródło:
Zadanie pochodzi z czasopisma „Fizyka w szkole” styczeń-luty 1988

Komitet Okregowy Olimpiady Fizycznej w Szczecinie
www.of.szc.pl