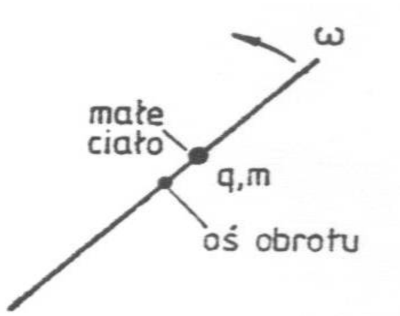
XXXVII OLIMPIADA FIZYCZNA ETAP III
Zadanie doświadczalne

ZADANIE D1

Nazwa zadania: „Obracający się pręt swobodnie"

Długi cienki pręt obraca się swobodnie wokół ustalonej pionowej osi, prostopadłej do niego – ryc. 4. Wzdłuż może się poruszać nanizane nań niewielkie ciało o masie *m* i ładunku *q.* Cały układ znajduje się w stałym, jednorodnym polu magnetycznym o indukcji **B**, równoległym do osi. Zwrot pola jest taki, że siła Lorentza działa na ciało w stronę osi obrotu.



Ryc.4

1. Dla jakich prędkości ω_0 ciało to rozpocznie ruch wzdłuż pręta w kierunku osi obrotu?
2. Dla jakich prędkości ω_0 ciało to będzie cały czas spoczywało względem pręta?
3. Załóżmy, że nie zachodzi ani przypadek 1 ani 2, tzn. ciało początkowo nieruchome znajdujące się przy osi obrotu rozpoczyna ruch wzdłuż pręta w kierunku od osi obrotu. Jaka będzie prędkość kątowa pręta w chwili, gdy ciało osiągnie zerową prędkość względem pręta? W jakiej odległości *R* od osi obrotu będzie wtedy znajdować się rozważane ciało? Czy po osiągnięciu odległości R ciało pozostanie tam na stale?

Przyjmujemy, że tarcia w układzie nie ma i że poruszający się ładunek nie promieniuje. Przyjmujemy też, że pręt jest dostatecznie długi. Moment bezwładności pręta względem rozważanej osi obrotu wynosi *I.*

ROZWIĄZANIE ZADANIA D1

Prędkość ciała v rozkładamy na składowe (ryc. 5): prostopadłą do pręta $v_\perp$ ($v_\perp = r\,\omega$), równoległą do pręta v_r

Na ciało działa siła Lorentza równa

$$qv \times B = \underbrace{qv_\perp \times B}_{F_{II}} + \underbrace{qv_r \times B}_{F_\perp}$$

Ta składowa siły Lorentza
jest prostopadła do pręta

Wartość składowej siły Lorentza skierowanej wzdłuż pręta ku osi wynosi

$$F_{II} = qr\omega B$$

W ruchu po okręgu siła dośrodkowa w odległości r od środka wynosi

$$F_d = \omega^2 rm$$

Jeżeli $F_{II} < F_d$ to ciało zacznie poruszać się ku środkowi pręta (ku osi obrotu). Mamy

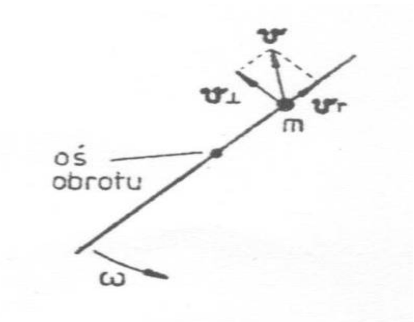
$$F_{II} = qr\omega_0 B > \omega^2 rm = F_d$$

Zatem

$$\omega_0 < \frac{qB}{m} \stackrel{def}{=} \omega_L$$

Widzimy, że ciało zacznie się poruszać ku środkowi pręta dla

$$\omega_0 < (\omega_L = qB/m)$$



Ryc.5

Jeżeli $F_{II} = F_{\perp}$ to ciało będzie poruszało się po okręgu pozostając w spoczynku względem pręta. Przypadek ten zachodzi, gdy

$$\omega_0 = \omega_L (= qB/m)$$

Jeżeli $F_{II} < F_d$ to zajdzie przypadek 3, tzn. ciało rozpocznie ruch w kierunku od osi obrotu. Przypadek ten ma miejsce dla $\omega_0 < \omega_L$

Przypadkiem tym, zgodnie z treścią zadania zajmiemy się szczegółowo.

Siła Lorentza $qv(t) \times B$ w każdej chwili t jest prostopadła do $v(t)$, a zatem jaj moc $F \bullet v$ jest równa zeru. Jej praca w dowolnym odcinku czasu jest więc też równa zeru. Wynika stąd, że całkowita energia mechaniczna układu zachowuje się. Biorąc pod uwagę fakt, że w układzie nie występuje energia potencjalna stwierdzamy, że zachowuje się całkowita energia kinetyczna układu (wniosek ten dotyczy nie tylko przypadku 3, ma on ogólny charakter).

Wobec powyższego:

$$\frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}mr^2\omega^2 + \frac{1}{2}mv_r^2 = \frac{1}{2}I\omega_0^2$$

gdzie

$\frac{1}{2}I\omega^2$ - energia kinetyczna ruchu obrotowego pręta w chwili t,

$\frac{1}{2}mr^2\omega^2$ - energia kinetyczna ciała w ruchu po okręgu w chwili t,

$\frac{1}{2}mv_r^2$ - energia kinetyczna ciała w ruchu wzdłuż pręta,

$\frac{1}{2}I\omega_0^2$ - energia kinetyczna układu na początku, równa energii kinetycznej ruchu obrotowego pręta (na początku ciało jest tuż przy osi obrotu i ma zaniedbywana prędkość).

Składowa momentu pędu układu wzdłuż osi obrotu nie jest zachowana, gdyż siła $F_\perp$ „dostarcza" układowi momentu pędu, który w bilansie momentu pędu należy uwzględnić.

Moment siły prostopadłej do pręta wynosi

$$qBrv_r$$

W ciągu czasu dt przyrost momentu pędu związany z działaniem tej siły wynosi dL:

$$dL = qBr\underbrace{v_r dt}_{=dr} = qBrdr$$

stąd

$$\frac{dL}{dr} = qBr$$

Zatem przyrost momentu pędu związany z działaniem składowej siły Lorentza prostopadłej do pręta wynosi

$$L = \frac{1}{2}qBr^2 = \frac{1}{2}mr^2\omega_L$$

(uwzględniono tu fakt, że $L = 0$ dla $r = 0$).

Bilans momentu pędu:

$$I\omega + mr^2\omega = I\omega_0 + \frac{1}{2}mr^2\omega_L + 0$$

gdzie

$I\omega$ - moment pędu pręta w chwili t

$mr^2\omega$ - moment pędu ciała w chwili t

$\frac{1}{2}mr^2\omega_L$ - moment pędu „dołożony” przez składową siły Lorentza

0 -moment pędu ciała na początku (leży ono praktycznie na osi obrotu)

W przypadku 3 interesuje nas sytuacja, gdy $v_r = 0$. Z zachowania energii i bilansu momentu pędu dostajemy dwa równania na dwie niewiadome R i ω:

$$I\omega^2 + mR^2\omega^2 = I\omega_0^2$$

$$I\omega + mR^2\omega = I\omega_0 + \frac{1}{2}mR^2\omega_L$$

Rozwiązując powyższy układ równań dostajemy

$$\omega = \frac{\omega_0\omega_L}{2\omega_0 - \omega_L}$$

$$R = \frac{2}{\omega_L}\sqrt{\omega_0(\omega_0 - \omega_L)\frac{I}{m}}$$

Podany wyżej układ równań ma jeszcze jedno rozwiązanie: $\omega = \omega_0$. Rozwiązanie to odpowiada sytuacji początkowej, gdy ciało znajduje się na osi obrotu.

Po osiągnięciu odległości R od osi obrotu, ze względu na warunek $\omega_L < \omega_0$ zachodzący w rozważanych przypadkach, będziemy mieli $\omega < \omega_L$ co oznacza, że ciało w odległości R nie pozostanie w spoczynku na stale lecz po chwilowym spoczynku rozpocznie ruch w kierunku osi obrotu.

Dalsza analiza ruchu wykracza poza treści zadania. Wydaje się jednak celowe, by czytelnik zechciał ją przeprowadzić samodzielnie i znalazł stan układu po bardzo długim czasie. Dla ułatwienia zwracamy uwagę, że stan układu nie będzie się zmieniać okresowo jak na pierwszy rzut oka mogłoby się wydawać.

Przy sprawdzaniu rozwiązań stosowano następujące kryteria:

1) odpowiedź na punkt 1 — 1 pkt.
2) odpowiedź na punkt 2 — 1 pkt.
3) określenie kierunku siły Lorentza — 1 pkt.
4) zastosowanie prawa zachowania energii — 1 pkt.
5) sformułowanie bilansu momentu pędu — 2 pkt.
6) obliczenia (ułożenie równań) — 1 pkt.
7) wyznaczenie końcowej prędkości kątowej — 1 pkt.
8) wyznaczenie R — 1 pkt.
9) stwierdzenie, co będzie się działo po zatrzymaniu ciała w odległości R — 1 pkt.

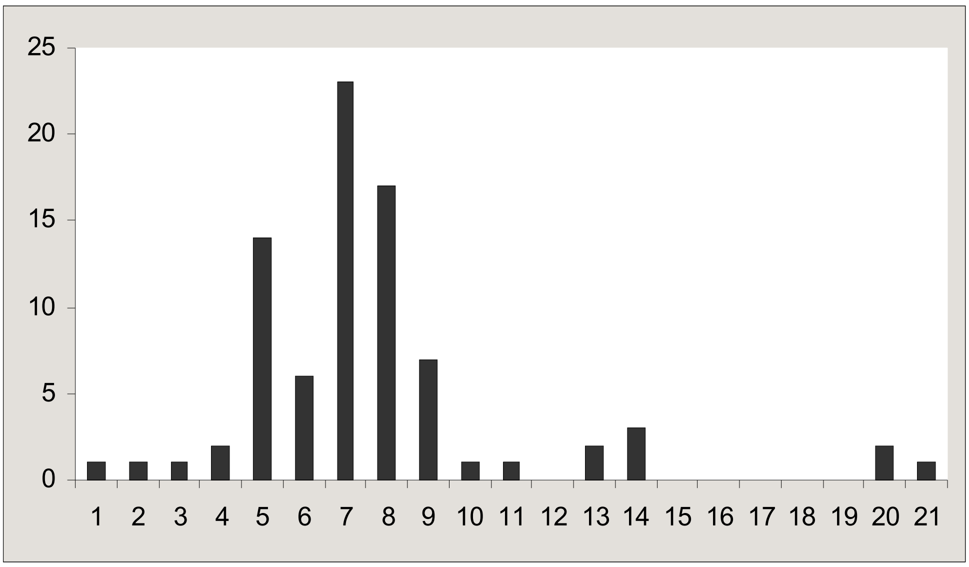
razem 10 pkt.

Część rozwiązań odbiegała od podanego wyżej; niektórzy zawodnicy stosowali równania ruchu zamiast korzystać z zasady zachowania energii i bilansu momentu pędu. Oczywiście, o ile nie było błędów, to niezależnie od stosowanej metody zawsze było można osiągnąć pełną, tj. maksymalna liczbę punktów.

Podstawowymi błędami były:

- niezauważanie, że siła Lorentza ma składową prostopadła do pręta
- zakładanie, że moment pędu jest zachowany.

Histogram wyników przedstawiono na ryc. 6.



Ryc. 6 Histogram wyników uzyskanych w zadaniu 2

Źródło:
Zadanie pochodzi z czasopisma „Fizyka w Szkole”

Komitet Okregowy Olimpiady Fizycznej w Szczecinie
www.of.szc.pl