XXXIV OLIMPIADA FIZYCZNA ETAP I
Zadania teoretyczne

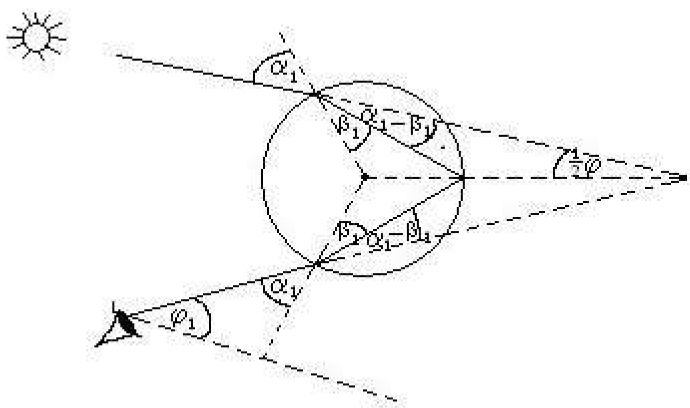
ZADANIE T2

Nazwa zadania: „Zjawiska odbicia światła"

Wyznacz promień kątowy tęcz 1, 2, 3 i 4 rzędu. Wyjaśnij dlaczego tęcze 3 i 4 rzędu w praktyce są nieobserwowalne.
Uwaga: Tęczą n-tego rzędu nazywamy tęczę, która powstaje w wyniku n odbić promieni słonecznych w kropelce wody.

ROZWIĄZANIE ZADANIA T2

Dla tęczy 1-go rzędu (ryc.2) mamy: $\varphi_1 = 4\beta_1 - 2\alpha_1$ (φ_1 - promień kątowy tęczy).



Ryc.2

Należy znaleźć ekstremum funkcji $\varphi_1(\alpha_1)$. Mamy

$$\varphi_1^{'} = 4\beta_1^{'} - 2\,.$$

Prim oznacza tu pochodną po α_1.
W ekstremum $\varphi_1^{'} = 0$ a więc wtedy $\beta_1^{'} = 1/2$. $\beta_1^{'}$ możemy wyznaczyć ze związku

$$\sin\alpha_1 = n\sin\beta_1\,, \tag{1}$$

gdzie n – współczynnik załamania kropelki. Różniczkując obie strony po α_1 dostajemy

$$\cos\alpha_1 = n\cos\beta_1 \cdot \beta_1^{'}$$

$$\beta_1^{'} = \frac{\cos\alpha_1}{n\cos\beta_1}\,.$$

Wobec tego

$$\frac{2\cos\alpha_1}{n\cos\beta_1} = 1\,.$$

Korzystając ze związku (1) po niewielkich obliczeniach otrzymujemy

$$\sin^2\alpha_1 = \frac{4-n^2}{3}\,.$$

Stąd dostajemy

$$\varphi_1 = 4\arcsin\frac{1}{n}\sqrt{\frac{4-n^2}{3}} - 2\arcsin\sqrt{\frac{4-n^2}{3}}\ .$$

Dla n= 4/3 (woda) $\varphi_1 \approx 42^0$.

W przypadku tęczy 2, 3 i 4-go rzędu, jak łatwo sprawdzić mamy

$$\varphi_2 = 6\beta_2 - 2\alpha_2 + 180^0,$$

$$\varphi_3 = 8\beta_3 - 2\alpha_3,$$

$$\varphi_4 = 10\beta_4 - 2\alpha_4 + 180^0$$

(wskaźnik odpowiada rzędowi tęczy ; znaczenie kątów α, β i φ jak na ryc. 2).

W ekstremach mamy

$$\varphi_2 = 6\beta_2' - 2 \qquad (= 0)$$

$$\varphi_3' = 8\beta_3' - 2 \qquad (= 0)$$

$$\varphi_4' = 10\beta_4' - 2 \qquad (= 0)$$

Różniczkowanie (zaznaczone primem) odnosi się do właściwej zmiennej α_i

Podobnie jak poprzednio

$$\beta_i' = \frac{\cos\alpha_i}{n\cos\beta_i}\ .$$

Zatem

$$\frac{3\cos\alpha_2}{n\cos\beta_2} = 1,$$

$$\frac{4\cos\alpha_3}{n\cos\beta_3} = 1,$$

$$\frac{5\cos\alpha_4}{n\cos\beta_4} = 1.$$

Dalej postępując podobnie jak poprzednio dostajemy:

$$\varphi_2 = 6\arcsin\frac{1}{n}\sqrt{\frac{9-n^2}{8}} - 2\arcsin\sqrt{\frac{9-n^2}{8}} + 180^0,$$

$$\varphi_3 = 8\arcsin\frac{1}{n}\sqrt{\frac{16-n^2}{15}} - 2\arcsin\sqrt{\frac{16-n^2}{15}},$$

$$\varphi_4 = 10\arcsin\frac{1}{n}\sqrt{\frac{25-n^2}{24}} - 2\arcsin\sqrt{\frac{25-n^2}{24}} + 180^0.$$

Dla wody

$$\varphi_2 \approx 309^0, \varphi_3 = 222^0, \varphi_4 = 136^0.$$

Kątom z pierwszej i ostatniej ćwiartki odpowiada łuk tęczy po stronie przeciwnej niż Słońce. Tęcze 3-go i 4-go rzędu leżą po tej samej stronie co Słońce i są przez to niewidoczne, tym bardziej, że po każdym kolejnym odbiciu wiązka ulega osłabieniu a ponadto – co nietrudno stwierdzić – szerokość kątowa łuku tęczy wzrasta wraz z rzędem tęczy.

Kryteria ocen:

Za każdy rząd tęczy aż do 4-go włącznie po 2pkt.

Za dyskusję położenia i widoczności wraz z obliczeniami liczbowymi 2pkt.

Źródło:

Zadanie pochodzi z czasopisma „Fizyka w Szkole” maj-czerwiec 1985