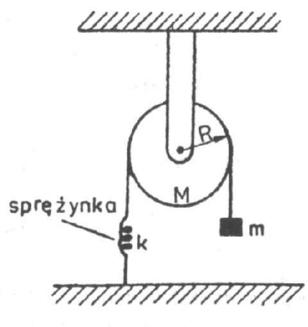
XXXIII OLIMPIADA FIZYCZNA ETAP WSTĘPNY
Zadanie teoretyczne

Rozwiąż dowolnie przez siebie wybrane dwa spośród trzech poniższych zadań:

Zadanie T1

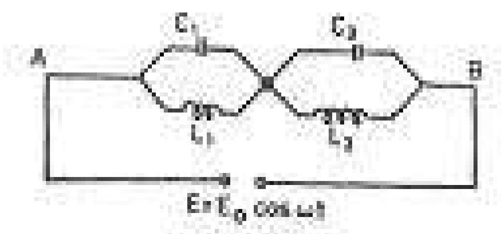
A. Pewien obiekt sfotografowano dwukrotnie za pomocą aparatu, którego obiektyw miał ogniskową 50 mm. Pierwszym razem zdjęcie wykonano z najmniejszej dopuszczalnej odległości a = 0,5 m. Drugim zaś razem między obiektyw i kamerę wstawiono pierścień przedłużający o wysokości h = 25 mm, po czym zdjęcie zrobiono znów z najmniejszej dopuszczalnej odległości. Znajdź stosunek wymiarów liniowych obrazów w obu tych przypadkach.

B. Dany jest układ pokazany na rys. 1. Masa jednorodnego bloczka wynosi *M*, a jego promień równa się R. Stała sprężystości jest równa *k*. Linka, na której wisi ciężarek *m,* oraz sprężynka SA nieważkie, nić nie ślizga się po bloczku. Bloczek może obracać się na swej osi bez tarcia. Oblicz okres pionowych małych drgań ciężarka po wytrąceniu go z położenia równowagi.



Rys. 1

C. Znajdź częstotliwość rezonansową obwodu pokazanego na rysunku



ROZWIĄZANIE ZADANIA T1

A) Zakładamy, że dla obiektywu złożonego spełnione jest równanie

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{f}$$

gdzie y i x oznaczają odpowiednio odległości przedmiotu i obrazu od obiektywu o ogniskowej f. Niech b oznacza odległość obrazu w pierwszym przypadku. Mamy

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f} \qquad \text{stąd} \qquad b=\frac{fa}{a-f}$$

W drugim przypadku odległość obrazu od obiektywu wynosi $x=b+h$. Odległość przedmiotu wynosi wówczas y określone wzorem

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{f}$$

$$y=\frac{fx}{x-f}=\frac{f(b+h)}{b+h-f}$$

W pierwszym przypadku powiększenie wynosi

$$p_1=\frac{b}{a}$$

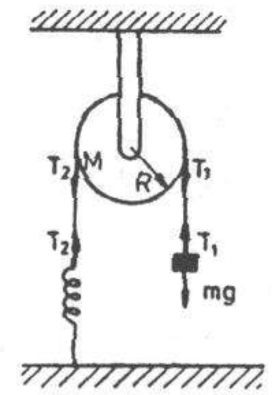
W drugim przypadku powiększenie jest równe

$$p_2=\frac{x}{y}$$

Szukany stosunek $\frac{p_2}{p_1}=p$ wynosi

$$p=\frac{x}{y}\frac{a}{b}=\frac{ha-hf+f^2}{f^2}=5{,}5$$

B) Rozkład sił pokazano na rysunku



Mamy

$$mg - T_1 = ma$$
$$(T_1 - T_2)R = I\varepsilon$$
$$a = \varepsilon R$$
$$I = \frac{1}{2}MR^2$$

gdzie T_1 i T_2 oznaczają napięcia nici, a a i ε są przyspieszeniami odpowiednio liniowymi ciężarka i kątowymi bloczka.
Dwa pierwsze równania wyrażają II prawo dynamiki dla ruchu postępowego i obrotowego. Równanie trzecie oznacz, że linka nie ślizga się po bloczku. Ostatnia zależność to wyrażenie na moment bezwładności (bloczka).
Z równań powyższych dostajemy

$$mg - T_1 = ma$$
$$T_1 - T_2 = \frac{1}{2}Ma$$

A stąd

$$mg - T_2 = \left(m + \frac{1}{2}M\right)a$$

Wielkość $mg - T_2$ w stanie równowago jest równa zeru (wtedy $T_2 = T_1$). Po dodatkowym wydłużeniu sprężynki o Δx wielkość ta jest równa zmianie siły sprężystej i wynosi $-k\Delta x$ (Δx

Oznacza przyrost długości sprężynki w porównaniu ze stanem równowagi). Uwzględniając, że

$$a = \frac{d^2\Delta x}{dt^2}$$

dostajemy

$$\left(m+\frac{1}{2}M\right)\frac{d^2\Delta x}{dt^2}=-k\Delta x$$

stąd zaś wynika, że

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m+\frac{1}{2}M}{k}}$$

C) Należy znaleźć taką częstotliwość lub częstotliwości ω, przy których natężenie prądu (skuteczne) dążyłoby do nieskończoności. Układamy równania wyrażające prawa Kirchhoffa. Niech prądy płynące przez kondensatory C_1 i C_2 wynoszą odpowiednio I_1 i I_2, a prąd pobierany ze źródła niech wynosi *I.* Wtedy przez cewki płyną prądy odpowiednio $I-I_1$ i $I-I_2$. Mamy

$$\frac{Q_1}{C_1}-L_1\frac{d}{dt}\left(I-I_1\right)=0$$

Pierwsze z tych równań wyraża fakt, że napięcie na kondensatorze C_1 (którego ładunek oznaczono przez Q_1) jest taki sam jak napięcie na cewce L_1. Drugie równanie wyraża analogiczny fakt dla kondensatora C_2 i cewki L_2. Ostatnie zaś równanie oznacza, że łączne napięcie na cewkach równe jest napięciu zasilającemu E.

Mamy dodatkowo: $I_1=\frac{d}{dt}Q_1$ i $I_2=\frac{d}{dt}Q_2$

Zatem

$$\frac{1}{C_1}I_1-L_1\frac{d^2}{dt^2}(I-I_1)=0$$

$$\frac{1}{C_2}I_2-L_2\frac{d^2}{dt^2}(I-I_2)=0$$

$$L_1\frac{d}{dt}(I-I_1)+L_2\frac{d}{dt}(I-I_2)-E=0$$

Szukamy rozwiązań w postaci ustalonej, zależnych harmonicznie od czasu czyli rozwiązań w postaci:

$$I=I_0\cos(\omega t+\vartheta)$$
$$I_1=I_{10}\cos(\omega t+\vartheta)$$
$$I_2=I_{20}\cos(\omega t+\vartheta)$$

Podstawiając to do otrzymanych równań dostajemy

$$\frac{1}{C_1} I_{10} \cos(\omega t + \vartheta) + L_1 \omega^2 \left[I_0 \cos(\omega t + \vartheta) - I_{10} \cos(\omega t + \vartheta_1) \right] = 0$$

$$\frac{1}{C_1} I_{20} \cos(\omega t + \vartheta_2) + L_2 \omega^2 \left[I_0 \cos(\omega t + \vartheta) - I_{20} \cos(\omega t + \vartheta_2) \right] = 0$$

$$L_1 \left[-\omega I_0 \sin(\omega t + \vartheta) + \omega I_{10} \sin(\omega t + \vartheta_1) \right] + L_2 \left[-\omega I_0 \sin(\omega t + \vartheta) + \omega I_{20} \sin(\omega t + \vartheta_2) \right] - E_0 \cos \omega t = 0$$

Równania powyższe maja być spełnione tożsamościowo ze względu na ωt. Funkcje $\cos \omega t$ i $\sin \omega t$, które otrzymuje się po rozpisaniu kosinusów i sinusów odpowiednich sum, są niezależne. Wynika stąd, że współczynniki przy $\cos \omega t$ i $\sin \omega t$ po lewej stronie w każdym z powyższych równań muszą być równe zeru. W ten sposób otrzymujemy układ sześciu równań, z których wyznaczamy I_0:

$$I_0 = \frac{E_0}{\omega} \frac{1 - C_1 L_1 \omega^2 - C_2 L_2 \omega^2 + C_1 C_2 L_1 L_2 \omega^4}{L_1 + L_2 - L_1 L_2 (C_1 + C_2) \omega^2}$$

Częstotliwość rezonansową wyznaczamy przyrównując mianownik otrzymanego wyrażenia do zera.

Dostajemy

$$\omega_{rez} = \sqrt{\frac{L_1 + L_2}{L_1 L_2 (C_1 + C_2)}}$$

Przy takiej częstotliwości $I_0 \to \infty$. Ewentualnie zbadanie, czy I_0 ma skończone maksima dla ω różnych od wyliczonej tu wartości ze względu na złożone obliczenia zdecydowanie przekracza możliwości ucznia i nie należy tego wymagać. Zadanie powyższe można rozwiązać również posługując się pojęciem oporu zespolonego (impedancji). Wyznaczenie ω_{rez} sprowadza się do znalezienia takiej wartości.

Źródło:
Zadanie pochodzi z „Druk OF”

Komitet Okręgowy Olimpiady Fizycznej w Szczecinie
www.of.szc.pl