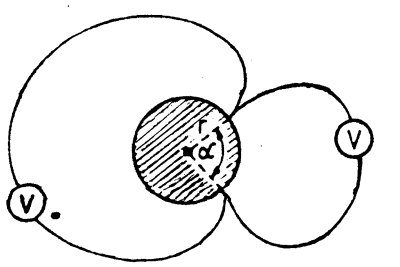
XXXIII OLIMPIADA FIZYCZNA ETAP I
Zadania teoretyczne

ZADANIE T1

Nazwa zadania: „Pierścienie z drutu”

Dany jest obwód przedstawiony na rycinie 1. Pierścień o promieniu r jest wykonany z drutu o oporze na jednostkę długości równą ρ. Woltomierze V są jednakowe. Ich opory wewnętrzne są równe R_v. Przewody łączące woltomierze z pierścieniem mają opór zaniedbywalnie mały. Przez pierścień (obszar zakreskowany) przechodzi strumień indukcji magnetycznej zmieniający się w czasie zgodnie z wzorem:

$$\Phi = \Phi_0 \cos\omega t$$



Ryc.1

Poza pierścieniem pola nie ma. Jak zmienia się napięcie na zaciskach woltomierzy i jakie napięcie skuteczne one wskazują? Jakie byłyby wskazania woltomierzy, gdyby ich opory R_v były bardzo duże w stosunku do występujących w układzie?

Samoindukcję wszystkich przewodników zaniedbujemy. Przyjmujemy, że średnia wartość indukcji magnetycznej ***B*** wewnątrz pierścienia ma składową prostopadłą do płaszczyzny pierścienia skierowaną Czytelnikowi.

ROZWIĄZANIA ZADANIA T1

Pole magnetyczne występuje tylko wewnątrz pierścienia. Jego strumień jest dany wzorem

$$\Phi = \Phi_0 \cos\omega t$$

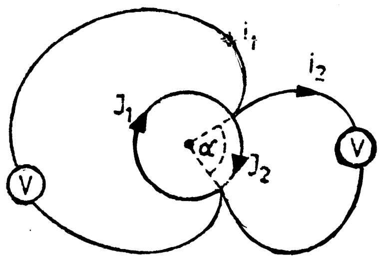
Wobec tego w pierścieniu działa siła elektromotoryczna indukcji

$$U = -\frac{d\Phi}{dt} = \Phi_0 \omega \sin\omega t$$

Wprowadźmy oznaczenia takie, jak na ryc. 2 Niech opór lewego łuku pierścienia (z I_1) wynosi R_1, a prawego (z I_2), R_2. Mamy

$$R_1 = (2\pi - \alpha)\rho r$$

$$R_2 = \alpha\rho r$$



Ryc.2

Wypisujemy równania wyrażająca prawa Ohma i Kirchoffa:

$$I_1 + i_1 = I_2 + i_2$$
$$I_1 R_1 + I_2 R_2 = U$$
$$i_2 R_v - i_2 R_2 = 0$$
$$i_1 R_v - i_1 R_1 = 0$$

Stąd

$$i_1 = \frac{UR_1\left(R_v + R_2\right)}{R_1 R_v^2 + 2R_1 R_2 R_v + R_2 R_v^2}$$
$$i_2 = \frac{UR_2\left(R_v + R_1\right)}{R_1 R_v^2 + 2R_1 R_2 R_v + R_2 R_v^2}$$

Wobec tego chwilowe napięcia na lewym i prawym woltomierzu są następujące:

$$U_1(t) = i_1 R_v = \frac{\Phi_0 \omega R_1\left(R_v + R_2\right)}{R_1 R_v + 2R_1 R_2 + R_2 R_v} \sin \omega t$$
$$U_2(t) = i_2 R_v = \frac{\Phi_0 \omega R_2\left(R_v + R_1\right)}{R_1 R_v + 2R_1 R_2 + R_2 R_v} \sin \omega t$$

Napięcia skuteczne wskazywane przez woltomierze są równe iloczynowi $\frac{1}{\sqrt{2}}$ oraz amplitudy zmian napięcie chwilowego:

$$\overline{U}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\Phi_0 \omega R_1\left(R_v + R_2\right)}{R_1 R_v + 2R_1 R_2 + R_2 R_v}$$
$$\overline{U}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\Phi_0 \omega R_2\left(R_v + R_1\right)}{R_1 R_v + 2R_1 R_2 + R_2 R_v}.$$

Dla $R_v \to \infty$ napięcia chwilowe i ich wartości skuteczne przechodzą w

$$U_{\infty 1} = \frac{\Phi_0 \omega R_1}{R_1 + R_2} \sin\omega t$$

$$U_{\infty 2} = \frac{\Phi_0 \omega R_2}{R_1 + R_2} \sin\omega t$$

$$\overline{U}_{\infty 1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\Phi_0 \omega R_1}{R_1 + R_2} \sin\omega t$$

$$\overline{U}_{\infty 2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\Phi_0 \omega R_2}{R_1 + R_2} \sin\omega t$$

Zauważmy, że napięcia na obu woltomierzach dopełniają się do napięcia U, co jest zrozumiałe, gdyż pole magnetyczne przechodzące przez pierścień przecina zarazem powierzchnię objętą przez skrajne przewody obwodu. Wprowadzając do znalezionych wzorów dostajemy:

$$U_{\infty 1} = U\left(1 - \frac{\alpha}{2\pi}\right)$$

$$U_{\infty 2} = U\frac{\alpha}{2\pi}$$

$$\overline{U}_{\infty 1} = \overline{U}\left(1 - \frac{\alpha}{2\pi}\right)$$

$$\overline{U}_{\infty 2} = \overline{U}\frac{\alpha}{2\pi}$$

gdzie $\overline{U} = \frac{1}{\sqrt{2}}\Phi_0\omega$.

Podobnie można postąpić i w przypadku wyrażeń na $U_1, U_2, \overline{U}_1$ i $\overline{U}_2$.

Podczas sprawdzania rozwiązań stosowano następujące kryteria:

wzór na U	1 pkt.
ułożenie równań	4 pkt.
rozwiązanie równań	2 pkt.
przejście graficzne $(R_v \to \infty)$	1 pkt.
przejście od wartości chwilowych do skutecznych	1 pkt.
zauważenie dopełnienia się napięć	1 pkt.

Zadanie powyższe nie było zbyt popularne wśród uczniów. Spośród tych, którzy je wybrali wielu nie dostrzegło istoty problemu otrzymując $U_1=U_2=0$, niezależnie od oporów woltomierzy. Część uczniów próbowała zlokalizować siły elektromotoryczne i rysowała rozmaite obwody, równoważne, które w istocie wcale nie były równoważne obwodowi z tekstu zadania. Bardzo dużo kłopotów sprawiło uczniom prawidłowe ułożenie równań Kirchoffa. Rozwiązań poprawnych było mało.

Źródło:
Zadanie pochodzi z czasopisma „Fizyka w Szkole”

Komitet Okregowy Olimpiady Fizycznej w Szczecinie
www.of.szc.pl