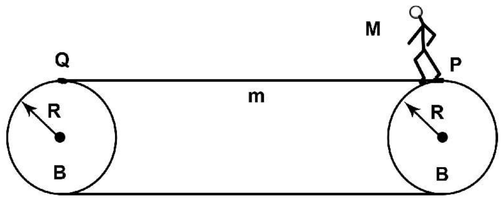
XXXIII OLIMPIADA FIZYCZNA ETAP III
Zadanie teoretyczne

ZADANIE T1

Nazwa zadania:

Przez dwa koła o promieniach *R,* momentach bezwładności *B* i o osiach odległych o *l* przerzucono poziomo pas transportera o masie *m* ryc. 1. W punkcie *P* stanął chłopiec o masie *M,* który w pewnej chwili rozpoczął marsz w kierunku punktu *Q* z prędkością υ względem transportera.



Ryc. 1

Czy chłopiec ten osiągnie punkt *Q,* a jeżeli tak, to po jakim czasie? Zakładamy, że pas nie ślizga się po kołach, że zginanie pasa na kołach nie jest stowarzyszone z dyssypacją energii i że koła mogą obracać się wokół swych osi bez żadnych oporów.

ROZWIAZANIE ZADANIA T1

Oznaczmy prędkość chłopca (w układzie związanym z ziemią) przez υ_c a prędkość transportera przez υ_t. Prędkość kątowa rolek wynosi $E_c = \frac{1}{2}M\upsilon_c^2$, natomiast energia kinetyczna transportera wraz z rolkami jest równa

$$E_t = \left(\frac{m}{2} + 2\cdot\frac{B}{2R^2}\right)\upsilon_t^2 .$$

Rozpatrzmy bardzo krótki przedział Δt zawarty w krótkim odstępie czasu,
w którym zachodzi oddziaływanie między chłopcem a transporterem (zlokalizowane między dolną częścią buta a pasem). Na chłopca działa siła F przenoszona przez mięśnie na jego środek masy, a na transporter siła $-F$. Siły te wykonują prace zwiększające energie kinetyczne

$$\mathrm{Pr}\,aca = F\cdot\Delta x = F\cdot(\upsilon\Delta t)$$

Zbadajmy teraz przyrost wielkości E danej zależnością $E = \alpha\upsilon^2$, gdzie α jest stałą.
Mamy

$$\Delta E = \alpha(\upsilon + \Delta\upsilon)^2 - \alpha\upsilon^2 = 2\alpha\upsilon\Delta\upsilon + \alpha(\Delta\upsilon)^2 .$$

Dla bardzo krótkiego przedziału czasu $\Delta\upsilon$ też jest bardzo małe i wyraz z $(\Delta\upsilon)^2$ można pominąć.
Mamy więc

$$\Delta\left(\alpha\upsilon^2\right) \approx 2\alpha\upsilon\Delta\upsilon$$

Zapiszemy teraz bilans energii dla chłopca (wskaźnik c) i transportera (wskaźnik t).
Mamy

$$\Delta x_c \cdot F = \upsilon_c \Delta t F = M\upsilon_c \Delta\upsilon_c\,,$$

$$\Delta x_t \cdot (-F) = \upsilon_t \Delta t(-F) = \left(m + \frac{2B}{R^2}\right)\upsilon_t \Delta\upsilon_t\,.$$

Stąd

$$\Delta t F = M\Delta\upsilon_c\,,$$
$$\Delta t(-F) = \left(m + \frac{2B}{R^2}\right)\Delta\upsilon_t\,.$$

Po dodaniu stronami otrzymujemy

$$0 = M\Delta\upsilon_c + \left(m + \frac{2B}{R^2}\right)\Delta\upsilon_t = \Delta\left[M\upsilon_c + \left(m + \frac{2B}{R^2}\right)\upsilon_t\right]$$

dla każdego Δt.

Wynika stąd, że dla każdego *t* mamy:

$$M\upsilon_c + \left(m + \frac{2B}{R^2}\right)\upsilon_t = const.$$

Jest to obowiązująca w rozważanym układzie zasada zachowania. Matematycznie jest ona podobna do zasady zachowania pędu na przykład w układzie chłopiec + łódka.

Ze względu na warunki początkowe układu „const” w ostatnim wzorze jest równa zeru.
Zatem

$$\upsilon_t = -\upsilon_c \frac{M}{m + \frac{2B}{R^2}}\,.$$

Prędkość względna chłopca względem transportera

$$\upsilon = \upsilon_c - \upsilon_t\,,$$

a więc

$$\upsilon = \upsilon_c - \left(-\upsilon_c \frac{M}{m + \frac{2B}{R^2}} \right) = \upsilon_c \left[1 + \frac{M}{m + \frac{2B}{R^2}} \right].$$

Z treści zadania znamy υ. Widzimy, że prędkość chłopca względem ziemi υ_c jest mniejsza niż względem transportera υ, ale ma ten sam zwrot. Wobec tego chłopiec na pewno dojdzie do punktu *Q.*
Potrzebny na to czas *T* wynosi

$$T = \frac{1}{\upsilon_c} = \frac{1}{\upsilon} \left[1 + \frac{M}{m + \frac{2B}{R^2}} \right].$$

Źródło:
Zadanie pochodzi z „Druk OF”

Komitet Okręgowy Olimpiady Fizycznej w Szczecinie
www.of.szc.pl