

XXXII OLIMPIADA FIZYCZNA ETAP WSTĘPNY

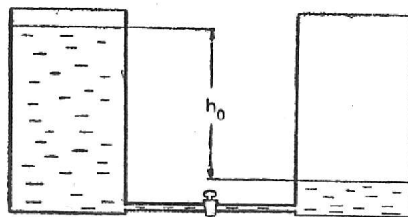
Zadania teoretyczne

Rozwiąż dowolnie wybrane dwa zadania z poniższych trzech:

Zadania T3

Nazwa zadania: „Dwa naczynia połączone rurką.”

- A. Dane są dwa identyczne, cylindryczne naczynia połączone u dołu rurką z kranem – jak na rys. 8. W sytuacji początkowej kran jest zamknięty, a różnica poziomów wody wypełniającej naczynia wynosi $h_0=0,4$ m. W pewnej chwili otworzono kran. Stwierdzono, że po 10 minutach różnica poziomów zmniejszyła się do $h_0/2$. Jaka będzie różnica poziomów po upływie dalszych 10 minut? Przedstaw i omów przyjęte w zadaniu założenia.



Rys. 8

Nazwa zadania: „Moment bezwładności a proste płyty jednorodnej.”

- B. Dana jest cienka, płaska, niekoniecznie jednorodna płyta dowolnego kształtu. Spośród wszystkich prostych przechodzących przez ustalony punkt O płaszczyzny tej płyty wybierz tę, względem, której moment bezwładności płyty jest największy.

Nazwa zadania: „Płaska obracająca się tarcza.”

- C. Na obracającej się płaskiej, poziomej tarczy położono płasko krążek mający swobodę obrotu dookoła swej osi, której położenie w przestrzeni jest ustalone. Odległość między osią krążka a osią tarczy wynosi $R \neq 0$. Krążek całą swoją dolną powierzchnią przylega do tarczy. Prędkość kątowna tarczy jest stała, początkowa prędkość kątowna krążka jest równa zero. Przyjmując, że między krążkiem a tarczą występuje pewne tarcie zbadaj, czy po pewnym czasie krążek będzie się obracał, a jeśli tak, to, w którą stronę?

ROZWIĄZANIE ZADANIA T3

- A. Na podstawie podanej w zadaniu wartości $h_0=0,4\text{ m}$ można oszacować, że maksymalna prędkość przepływu cieczy przez rurkę i kran jest rzędu 1 m/s (prędkość ta w żadnym wypadku nie może przewyższać prędkości spadku swobodnego wysokości h_0). W tych warunkach możemy przyjąć, że opory przepływu są proporcjonalne do prędkości przepływającej cieczy. Ponieważ opory przepływu są równoważone przez występujące między naczyniami różnicę ciśnień hydrostatycznych, wynika stąd proporcjonalność objętościowej szybkości przepływu wody między naczyniami do różnicy poziomów wody w tych naczyniach.

Przyjmijmy, że w czasie Δt różnica poziomów w obu naczyniach zmniejszyła się o Δh . Jeśli pole przekroju poprzecznego naczyń (poziomą płaszczyznę) oznaczymy przez S , objętościowa szybkość przepływu będzie równa

$$\frac{S \cdot \Delta h}{2 \cdot \Delta t} \quad (\text{w granicy dla } \Delta t \rightarrow 0).$$

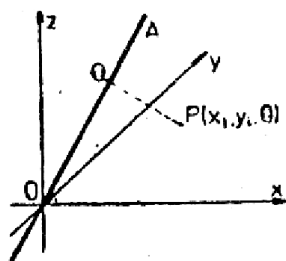
Jest ona proporcjonalna do h , co zapisujemy jako

$$\frac{S \Delta h}{2 \Delta t} = kh,$$

gdzie k oznacza współczynnik proporcjonalności. Równanie to w postaci ścisłej jest równaniem różniczkowym, a jego rozwiązaniem jest funkcja wykładnicza

$$h(t) = h_0 2^{-t/\tau}$$

gdzie τ określa czas zmniejszenia się h do połowy (w tym przypadku $\tau = 10\text{ min}$). Na poziomie szkolnym powyższe równanie można rozwiązać w sposób przybliżony np. metodą graficzną. W odpowiedzi otrzymujemy $h_0/4$.



Rys. 15

- B. Wprowadźmy prostokątny układ współrzędnych xyz o początku w punkcie O i osiach xy leżących w płaszczyźnie płyty (rys. 15). Rozpatrzmy dowolnie mały element płyty o środku w punkcie $P(x_i, y_i)$ i o masie m_i . Moment bezwładności tego elementu względem osi A przechodzącej przez punkt O jest równy $m_i r_i^2$, gdzie r_i jest odległością PQ punktu P od jego rzutu Q na oś A .

Oznaczając odległość OQ przez d_i możemy napisać

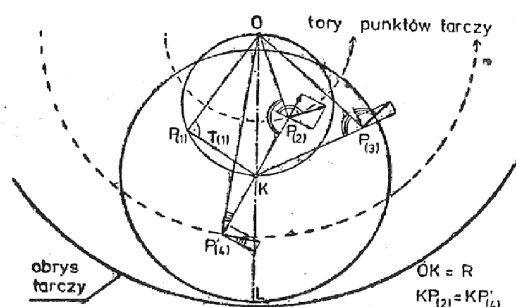
$$m_i r_i^2 = m_i (x_i^2 + y_i^2 - d_i^2).$$

Analizowany moment bezwładności płyty względem przechodzącej przez punkt O osi A jest równy

$$I = \sum_i m_i r_i^2 = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) - \sum_i m_i d_i^2.$$

Przyjmuje on maksymalną wartość, gdy oś ta jest prostopadła do płaszczyzny płyty, wówczas, bowiem dla dowolnego punktu płyty $d_i = 0$.

- C Rys. 16 ilustruje sytuację w płaszczyźnie styku krążka i tarczy. Punkt O przedstawia środek (oś) obrotu tarczy, punkt K - środek krążka, wokół którego krążek może się obracać (położenie punktu K jest ustalone). Siła tarcia kinetycznego działającego na krążek, przedstawiona wektorem \mathbf{T} , ma w każdym punkcie P powierzchni krążka kierunek prostopadły do promienia wodzącego OP i zwrot zgodny z obrotami tarczy. Wartość T tej siły jest niezależna od położenia



Rys. 16

punktu P , ponieważ jest ona proporcjonalna do współczynnika tarcia oraz siły nacisku krążka na tarczę przypadającą na jednostkę powierzchni, która jest stała. Jeżeli odległość PK oznaczymy przez $r(P)$, to wartość momentu wektora \mathbf{T} w punkcie P względem punktu K wyrazi się wzorem

$$M(P) = r(P)T \cos \angle OPK.$$

Znak tego wyrażenia nie jest jednakowy dla wszystkich punktów krążka. Dla punktów należących do okręgu o średnicy OK (punkt $P(1)$ na rysunku) $\cos \angle OPK = 0$. Na zewnątrz tego okręgu (punkty $P(3)$ $P(4)$) $\cos \angle OPK > 0$, czemu odpowiada moment $\mathbf{M}(P)$ zgodny z kierunkiem obrotów tarczy. Dla punktów położonych wewnątrz tego okręgu (punkt $P(2)$) $\cos \angle OPK < 0$ czemu odpowiada moment $\mathbf{M}(P)$ przeciwny względem obrotów tarczy.

Rozpatrzmy teraz wypadkowy moment dla pary punktów P i P' położonych symetrycznie względem środka K (punkty $P(2)$ i $P'(4)$ na rysunku). Wartość tego momentu wynosi

$$M_w(PP') = r(P)T(\cos \angle OPK + \cos \angle OP'K).$$

Z trójkąta OPP' widać, że

$$\cos \angle OPK + \cos \angle OP'K > 0.$$

Wypadkowy moment dla takiej pary punktów jest, więc zawsze zgodny z kierunkiem obrotów tarczy. Jedynie dla punktów leżących na prostej OL powyższe wyrażenie jest równe zero. Rezultat tego rozumowania nie zależy od stosunku promienia krążka do odległości $OK = R$.

Wynika stąd wniosek, że całkowity moment sił tarcia działający na krążek, względem jego osi jest różny od zera i ma zwrot zgodny z obrotami tarczy. Wobec tego krążek zostanie wprowadzony w ruch obrotowy zgodny z kierunkiem obrotów tarczy.

Punktacja:

- 3A. 1 pkt. – wyznaczenie różnicy poziomów po upływie 10 minut

- 1 pkt. – opis pisemny toku rozwiązywania zadania
0,5 pkt. – przedstawienie rozwiązania metodą graficzną
- 3B. 1 pkt. – wyznaczenie prostej względem, której moment bezwładności płyty jest największy
1 pkt. – opis pisemny toku rozwiązywania zadania
0,5 pkt. – udzielenie pełnej pisemnej końcowej odpowiedzi
- 3C. 0,5 pkt. – udzielenie prawidłowej odpowiedzi na zadane w zadaniu pytanie
1,5 pkt. – uzasadnienie pisemne swojego wyboru
0,5 pkt. – wykonanie rysunku pomocniczego do zadania i odpowiednie opisanie go

Ogółem za całe zadanie można uzyskać **7,5 pkt.**

Źródło:
Zadanie pochodzi z czasopisma „XXXII Olimpiada Fizyczna (1982/83)”

Komitet Okręgowy Olimpiady Fizycznej w Szczecinie
www.of.szc.pl