

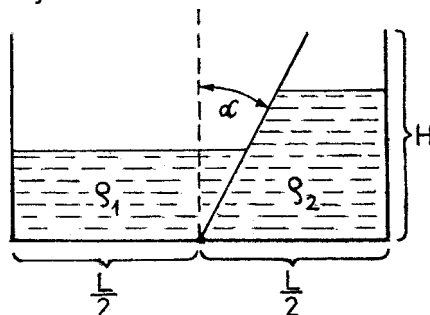
XXXII OLIMPIADA FIZYCZNA ETAP I

Zadania teoretyczne

ZADANIE T1

Nazwa zadania: „Ciecz napiera na przegrodę”

Prostopadłościenne naczynie o długości L , szerokości D i wysokości H przedzielone jest szczelną przegrodą o wysokości H , obracającą się na osi w połowie długości naczynia jak na ryc. 1. Po obu stronach przegrody znajdują się ciecz o gęstościach ρ_1 i ρ_2 , objętość każdej z nich jest równa V .



Ryc. 1

Znajdź kąt α , o jaki przegroda odchylna jest od pionu w stanie równowagi, przy zaniechaniu jej ciężaru. Przedyskutuj wynik.

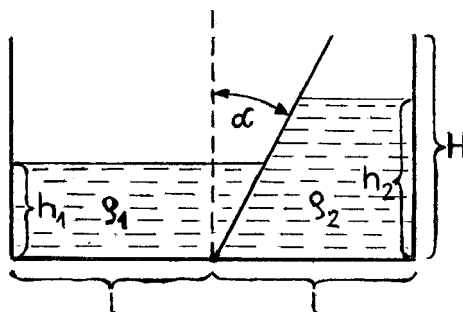
ROZWIĄZANIE ZADANIA T1

Niech dla wygody $l = \frac{1}{2} L$. Mamy (ryc. 2) :

$$V = \left(lh_1 + \frac{1}{2} h_1^2 \operatorname{tg} \alpha \right) D, \quad (1)$$

$$V = \left(lh_2 + \frac{1}{2} h_2^2 \operatorname{tg} \alpha \right) D. \quad (2)$$

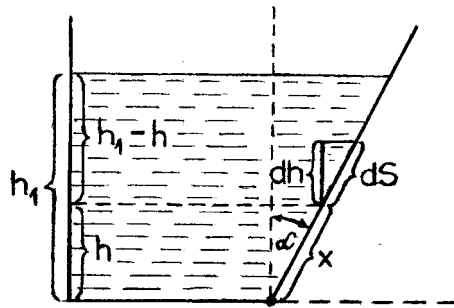
Związki te wyrażają fakt, że objętość cieczy po obu stronach przegrody są równe V .



Ryc. 2

W stanie równowagi całkowity moment sił działających na przegrodę musi być równy zero.

Obliczmy moment sił parcia działających na przegrodę od strony cieczy z lewej strony (ryc. 3). Parcie na pasek o szerokości ds . wynosi



Ryc. 3

$$dP = \rho_1 g (h_1 - h) ds \cdot D.$$

Ale

$$\frac{dh}{ds} = \cos \alpha$$

zatem

$$dP = \rho_1 g (h_1 - h) D \frac{dh}{\cos \alpha}.$$

Siła dP jest skierowana prostopadle do przegrody. Jej moment względem osi obrotu przegrody co do wartości wynosi

$$dM_1 = dP \cdot x = \rho_1 g (h_1 - h) D \frac{dh}{\cos \alpha} x.$$

Ponieważ

$$\frac{h}{x} = \cos \alpha$$

więc

$$dM_1 = \rho_1 g (h_1 - h) Dh \frac{1}{\cos^2 \alpha} dh.$$

Po całkowaniu otrzymujemy

$$M_1 = \frac{\rho_1 g D}{6 \cos \alpha} h_1^3.$$

W podobny sposób obliczamy moment M_2 działający na przegrodę w wyniku oddziaływania cieczy z drugiej strony. Porównując te momenty dostajemy

$$\rho_1 h_1^3 = \rho_2 h_2^3 \quad (3)$$

Mamy więc trzy warunki i trzy niewiadome h_1 , h_2 , α . Z (1) i (2) dostajemy :

$$h_1 = \frac{1}{D \operatorname{tg} \alpha} \left[-1D + \sqrt{1^2 D^2 + 2VD \operatorname{tg} \alpha} \right]$$

(wzięliśmy znak „+”, bo w przeciwnym wypadku na h_1 otrzymalibyśmy wielkość ujemną),

$$h_2 = \frac{1}{D \operatorname{tg} \alpha} \left[1D - \sqrt{1^2 D^2 - 2VD \operatorname{tg} \alpha} \right]$$

(wzięliśmy znak „-”, aby otrzymać prawidłowy wynik dla $\alpha \rightarrow 0$; patrz równanie (2)). Wysokości h_1 i h_2 wstawiamy do warunku (3).

Otrzymujemy :

$$\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{ID - \sqrt{ID^2 - 2VDtg\alpha}}{-ID + \sqrt{ID^2 + 2VDtg\alpha}}.$$

Dla uproszczenia wielkość $\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^{\frac{1}{3}}$ oznaczamy jako A. Mamy :

$$A(\sqrt{I^2D^2 + 2VDtg\alpha} - ID) = ID - \sqrt{I^2D^2 - 2VDtg\alpha}$$

$$ID(1+A) = A\sqrt{I^2D^2 + 2VDtg\alpha} + \sqrt{I^2D^2 - 2VDtg\alpha}$$

$$I^2D^2(1+A)^2 = A^2(I^2D^2 + 2VDtg\alpha) + I^2D^2 - 2VDtg\alpha + 2A\sqrt{I^4D^4 - 4V^2D^2tg^2\alpha}.$$

Po uporządkowaniu, ponownym podniesieniu do kwadratu, redukcji wyrazów podobnych i uproszczeniu dostajemy

$$tg\alpha = \frac{2DI^2(A^2 - 1)A}{V(1 + A^2)^2}.$$

W dyskusji należało zwrócić uwagę na to, że przy wąskim naczyniu i dużej ilości cieczy lub przy dużym stosunku gęstości, przegroda może oprzeć się o ścianę naczynia przed osiągnięciem kąta odpowiadającego rozważanej równowadze. Przy szerokim zaś naczyniu i dużym stosunku gęstości nastąpi przelanie się cieczy z jednej części naczynia do drugiej.

Punktację za to i pozostałe zadania ustalały odpowiednie Komitety Okręgowe. Na podstawie opinii przesłanych przez Komitety Okręgowe najpoważniejsze błędy to :

- 1) Złe ustalenie warunku równowagi. Część zawodników przyjmowała równość parć na obie strony przegrody (zamiast równość momentów). Błąd ten dyskwalifikował pracę.
- 2) Niepoprawne przekształcenia matematyczne.

Oto kryteria, jakie stosowano przy ocenianiu rozwiązań :

wzory na V	3 pkt.
wzór na dP	2 pkt.
wzór na dM ₁ i całkowanie	4 pkt.
wzór na M ₁	2 pkt.
wzór na M ₂	2 pkt.
wzór na h ₁ i h ₂	3 pkt.
przekształcenia wzorów	1 pkt.

Źródło:
Zadanie pochodzi z czasopisma „Fizyka w szkole 82/83”

Komitet Okręgowy Olimpiady Fizycznej w Szczecinie
www.of.szc.pl