XXXI OLIMPIADA FIZYCZNA ETAP WSTĘPNY
Zadanie teoretyczne

Rozwiąż dowolnie przez siebie wybrane dwa zadania spośród poniższych trzech:

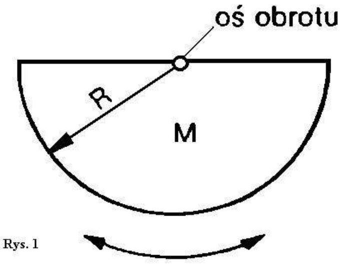
ZADANIE T1

Nazwa zadania:

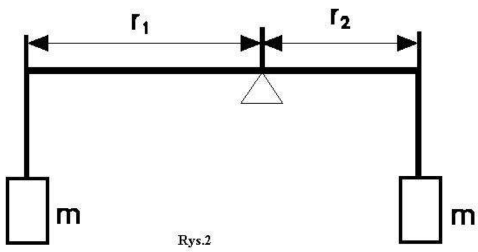
Rozwiąż dowolnie przez siebie wybrane dwa zadania spośród poniższych trzech:

A. Oblicz okres małych drgań jednorodnej półkuli o masie M i promieniu R zawieszonej na osi leżącej na płaskiej powierzchni półkuli i przechodzącej przez jej środek (rys.1).

B. Do końców sztywnej, nieważkiej dźwigni o ramionach r_1 i r_2 (rys.2) podwieszono – przytrzymując dźwignię – na nieważkich, nierozciągliwych niciach dwie jednakowe masy m. Z jakim przyspieszeniem zacznie się poruszać każda z tych mas po zwolnieniu dźwigni?

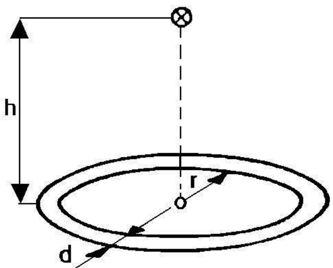


Rys. 1



Rys.2

C. Dany jest płaski, poziomy pierścień o promieniu r i szerokości d ($d<<r$). Na jakiej wysokości h nad środkiem pierścienia (rys.3) należy umieścić punktowe, izotropowe źródło światła, aby oświetlenie powierzchni pierścienia było jak największe?



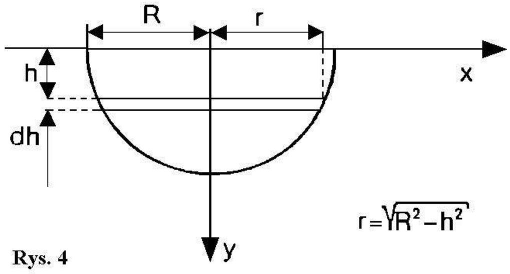
Rys. 3

ROZWIAZANIE ZADANIA T1

A. Półkula zawieszona na osi stanowi rodzaj wahadła fizycznego. Okres drgań takiego wahadła jest dany wzorem

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgl}} \qquad (1)$$

gdzie I jest momentem bezwładności bryły względem osi obrotu, M – jej masą, g – przyspieszeniem ziemskim, l – odległością środka masy bryły od osi obrotu.



Rys. 4

Moment bezwładności I półkuli o masie M i promieniu R względem rozważanej osi jest równy połowie momentu bezwładności kuli o tym samym promieniu R i masie $2M$ względem osi przechodzącej przez środek, a więc

$$I = \frac{1}{2}\frac{2}{5}2MR^2 = \frac{2}{5}MR^2 \qquad (2)$$

Do wyznaczenia okresu wahań półkuli na podstawie wzoru (1) potrzebna jest jeszcze znajomość położenia środka masy półkuli. Jest oczywiste, że znajduje się on na osi symetrii półkuli, która pokrywa się z osią y na rysunku 4. Współrzędną y środka masy – równą poszukiwanej odległości l – obliczamy z warunku, aby iloczyn jej i masy półkuli równał się całce z iloczynu współrzędnej y i masy dm odpowiedniej warstwy, liczonej po całce półkuli:

$$Ml = \int_0^R ydm$$

Wynika stąd

$$l = \frac{1}{M}\int_0^R ydm$$

Ale masa dm warstwy o współrzędnej y i grubości dy wynosi (ρ – gęstość materiału półkuli, r – współrzędna oznaczona na rys.

$$dm = \rho\pi r^2 dy = \pi\rho\left(R^2 - y^2\right)dy$$

Wobec tego

$$l = \frac{\pi\rho}{M}\int_0^R\left(R^2 - y^2\right)ydy = \frac{\pi\rho}{M}\left(\int_0^R R^2 ydy - \int_0^R y^3 dy\right) = \frac{\pi\rho}{M}\left(\frac{1}{2}R^2R^2 - \frac{1}{4}R^4\right) = \frac{\pi\rho R^4}{4M} \qquad (3)$$

Masa M półkuli jest równa połowie masy odpowiedniej kuli, czyli $M = \frac{2}{3}\pi R^3\rho$.

Podstawiając to wyrażenie do wzoru (3) otrzymujemy

$$l = \frac{3}{8}R$$

Po podstawieniu wyrażeń (2) i (4) do wzoru (1) uzyskujemy poszukiwany wzór na okres małych wahań półkuli:

$$T = 8\pi\sqrt{\frac{R}{15g}}$$

B. Oznaczmy przez F_1 i F_2 siły występujące po zwolnieniu dźwigni, działające na ramiona r_1 i r_2. Ponieważ dźwignia jest nieważka, musi zachodzić równość

$$F_1 r_1 = F_2 r_2$$

Interesujący jest jedynie przypadek, gdy $r_1 \neq r_2$ (dla $r_1 = r_2$ dźwignia pozostawałaby cały czas w równowadze). Przyjmijmy $r_1 > r_2$ i oznaczmy przez a_1 przyspieszenie masy zawieszonej na ramieniu r_1 zwrócone w dół oraz przez a_2 przyspieszenie drugiej masy zwrócone ku górze.

Równania ruchu dla omawianego układu są następujące:

$$ma_1 = mg - F_1$$

$$ma_2 = F_2 - mg$$

Wartości przyspieszeń a_1 i a_2 są przy tym powiązane z długościami ramion oraz z przyspieszeniem kątowym dźwigni ε zależnościami

$$a_1 = \varepsilon r_1 \ , \qquad a_2 = \varepsilon r_2$$

Rozwiązując układ powyższych pięciu równań otrzymujemy:

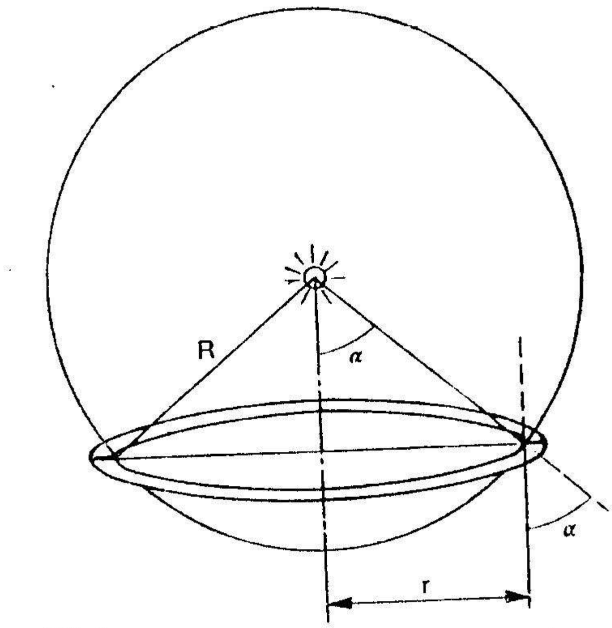
$$a_1 = g\frac{r_1 - r_2}{r_1^{\,2} + r_2^{\,2}}\, r_1 \, , \qquad a_2 = g\frac{r_1 - r_2}{r_1^{\,2} + r_2^{\,2}}\, r_2$$

C. Oznaczmy przez całkowity strumień świetlny emitowany przez źródło izotropowe we wszystkich kierunkach. Przy spełnionym warunku $d >> r$ cała powierzchnia pierścienia znajduje się praktycznie w odległości $R = \sqrt{h^2 + r^2}$ od źródła (rys.5). natężenie oświetlenia powierzchni kuli o promieniu R, w której środku znajduje się źródło, wynosi

$$E_k = \frac{\Phi}{4\pi R^2} = \frac{\Phi}{4\pi\left(h^2 + r^2\right)} \qquad (1)$$

Ponieważ prostopadła do powierzchni pierścienia tworzy z kierunkiem biegu promieni kąt α, natężenie oświetlenia powierzchni pierścienia E_p będzie dane wyrażeniem (1) pomnożonym przez cos α, gdzie

$$\cos\alpha = \frac{h}{R} = \frac{h}{\sqrt{h^2 + r^2}}$$



Rys. 5

a więc

$$E_p = \frac{\Phi}{4\pi}\frac{h}{\left(h^2 + r^2\right)^{3/2}}$$

(2)

Pozostaje nam teraz zbadać, dla jakiej wysokości h wyrażenie (2) ma maksimum. W tym celu obliczamy pochodną

$$\frac{d}{dh}\left[\frac{h}{\left(h^2 + r^2\right)^{3/2}}\right] = \frac{r^2 - 2h^2}{\left(h^2 + r^2\right)^{5/2}}$$

Pochodna ta zeruje się dla $h = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}r$. Łatwo sprawdzić, że dla $h = \frac{1}{\sqrt{2}}r$ (ujemny pierwiastek odrzucamy jako niefizyczny) funkcja (2) osiąga maksimum, a zatem przy tej wysokości źródła światła oświetlenia powierzchni pierścienia będzie największe.

Źródło:
Zadanie pochodzi z „Olimpiada fizyczna XXIX i XXXI"
Autor: A. Nadolny, K. Pniewska,
WSiP 1986

Komitet Okręgowy Olimpiady Fizycznej w Szczecinie
www.of.szc.pl