

XXVIII OLIMPIADA FIZYCZNA ETAP WSTĘPNY

Zadania teoretyczne

Rozwiąż wybrane przez siebie dwa zadania spośród poniższych trzech:

ZADANIE T3

Nazwa zadania: „Prawo Plancka”

- A. Zgodnie z prawem Plancka zdolność emisyjna ciała doskonale czarnego dana jest wzorem

$$E(\omega, T) = \frac{\hbar}{\pi^2 c^2} \omega^2 [\exp(\hbar \omega / kT) - 1]^{-1},$$

gdzie: ω - częstość promieniowania, $\hbar = h / 2\pi$ (h – stała Plancka), c – prędkość światła, k – stała Boltzmanna, T – temperatura bezwzględna. Udowodnij, że z prawa Plancka wynikają następujące prawa:

- prawo Stefana – Boltzmanna głoszące, że całkowita energia wypromieniowana w jednostce czasu przez ciało doskonale czarne jest proporcjonalna do czwartej potęgi temperatury bezwzględnej ciała,
- prawo przesunięć Wiena głoszące, że ciało doskonale czarne najwięcej energii wypromieniowuje na częstości proporcjonalnej do temperatury bezwzględnej,
- prawo Rayleigha – Jeansa głoszące, że dla dużych długości fal zdolność emisyjna ciała doskonale czarnego jest proporcjonalna do $\omega^2 T$,
- prawo Wiena głoszące, że dla małych długości fal zdolność emisyjna ciała doskonale czarnego jest proporcjonalna do

$$\omega^3 \exp(-\hbar \omega / kT)$$

(Wartości współczynników proporcjonalności nie trzeba obliczać).

Nazwa zadania: „Doświadczenie Gruma Browna”

- B. Grum Brown wykonał następujące doświadczenie: stężony roztwór azotanu wapnia wstrząsa się niedużą ilością fenolu aż do nasycenia tym ostatnim, po czym mieszaninę wlewa się do wysokiego, wąskiego naczynia. Fenol wznosi się i wypływa na powierzchnię roztworu azotanu wapnia. Ilość fenolu nie powinna wynosić więcej niż potrzeba do nasycenia cieczy i utworzenia warstwy o grubości kilku milimetrów. Następnie do naczynia wlewa się wodę destylowaną również nasyconą fenolem. Powinny utworzyć się trzy warstwy: roztwór azotanu wapnia, fenol, woda. Obserwując naczynie w ciągu kilku dni zauważa się stopniowe podnoszenie się warstwy fenolu, która w końcu dochodzi do samej powierzchni.

Wyjaśnij dlaczego tak się dzieje. (Azotan wapnia nie rozpuszcza się w fenolu).

Uwaga: Wynik obserwacji został podany po to, by doświadczenia tego nie wykonywać samemu – fenol jest trujący.

Nazwa zadania: „Moment bezwładności”

- C. Moment bezwładności ciała o masie m względem pewnej osi przechodzącej przez jego środek masy wynosi I_s . Znajdź oś (równoległą do wyżej wspomnianej), względem której drgania tego ciała (wahadło fizyczne) będą miały większą częstość.

ROZWIĄZANIE ZADANIA T3

- A. a) Całkowita wypromieniowana energia jest sumą energii wypromieniowanej dla poszczególnych częstości, a zatem jest proporcjonalna do całki

$$\int_0^{\infty} \frac{\omega^3}{e^{\hbar\omega/kT} - 1} d\omega$$

czyli do

$$\frac{k^4 T^4}{\hbar^4} \int_0^{\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx,$$

gdzie x jest zmienną całkowania równą $\hbar\omega/kT$. Widać stąd, że szukana energia jest proporcjonalna do T^4 .

- b) Należy znaleźć maksimum funkcji E . Obliczając pochodną otrzymuje się równanie

$$3(\exp \frac{\hbar\omega}{kT} - 1) - \omega \frac{\hbar}{kT} \exp \frac{\hbar\omega}{kT} = 0.$$

Widać, że po lewej stronie mamy funkcję stosunku ω/T . Zatem ekstremum funkcji odpowiada pewnej konkretnej wartości stosunku ω/T . Wobec tego w maksimum ω jest proporcjonalne do T .

- a) Dla dużych długości fal, czyli dla małych ω , można napisać

$$e^{\hbar\omega/kT} - 1 \approx \frac{\hbar\omega}{kT}$$

Stąd wynika już prawo Rayleigh – Jeansa.

- e) Dla dużych ω można zaniedbać jedynkę w mianowniku, co daje żadaną zależność.
- B. Warstwa fenolu stanowi pewną realizację błony półprzepuszczalnej. Woda z górnej warstwy przechodzi roztworu azotanu wapnia, zgodnie z ogólnymi prawami osmozy. Mikroskopowy opis procesu można sobie wyobrazić w sposób następujący. Na powierzchni granicznej fenol – woda (a ściślej roztwór wody w fenolu – roztwór fenolu w wodzie) zachodzi nieustanny przepływ substancji. Pewne cząstki wody z obszaru gdzie jest dużo wody a mało fenolu, wnikają w obszar prawie czystego fenolu. Inne cząsteczki opuszczają ten

obszar wchodząc do obszaru prawie czystej wody. Gdyby były tylko te dwie fazy, to szybkości obu procesów byłyby równe i mielibyśmy do czynienia z tzw. równowagą dynamiczną.

Ale w rzeczywistości fenol graniczy również z wodnym roztworem azotanu wapnia. Ba tamtej powierzchni również zachodzi wymiana cząsteczek wody; gdybyśmy mieli do czynienia tylko z tymi dwoma fazami (azotan wapnia w wodzie – woda w fenolu), to ustaliłaby się jakaś równowaga termodynamiczna. Jednakże łatwo sobie wyobrazić, że w tym stanie równowagi szybkość dwustronnego przechodzenia wody byłaby mniejsza, a stężenie wody w fenolu mniejsze. Związane jest to z istnieniem sił przyciągania pomiędzy cząsteczkami rozpuszczonej soli i cząsteczkami wody. Skoro sól jest rozpuszczalna w wodzie, to siły te muszą być przyciągające i muszą utrudniać przenikanie wody do fenolu.

Jeżeli na warstwie fenolu znajdującą się na warstwie azotanu wapnia nalejemy warstwę czystej wody to istniejące stężenie wody w fenolu okaże się mniejsze niż by wynikało z warunku równowagi termodynamicznej dla górnej powierzchni rozgraniczającej. W tych warunkach więcej wody z górnej warstwy wnika do fenolu niż w tym samym czasie przechodzi do najniższej warstwy. Zawartość wody w warstwie pośredniej zwiększa się ponad poziom odpowiadający równowadze termodynamicznej na dolnej powierzchni rozdziału. W rezultacie więcej wody musi przechodzić z roztworu wody w fenolu do roztworu azotanu niż odwrotnie. Wynik netto jest taki, że woda z górnej warstwy przechodzi stopniowo do warstwy dolnej rozcieńczając dolny roztwór a zarazem zwiększając jego objętość. Warstwa fenolu podnosi się. Az do całkowitego wyczerpania wody w najwyższej warstwie.

- C. Moment względem osi przechodzącej przez punkt O i równoległej do osi przechodzącej przez środek masy S oznaczamy przez I_0 . Zgodnie z twierdzeniem Steinera mamy

$$I_0 = md^2 + I_s$$

Gdzie d jest odległością między rozważanymi osiami. Częstość drgań wahadła otrzymanego przez zaczepienie ciała na osi przechodzącej przez punkt O jest dana zależnością:

$$\omega^2 = \frac{mgd}{I_0} = \frac{mgd}{I_s + md^2}$$

Gdzie m oznacza masę ciała a g przyspieszenie ziemskie. Ekstremum (maksimum) funkcji $\omega^2(d)$ mamy dla

$$d = \sqrt{I_s / m}$$

Przy takiej wartości d wartość ω wynosi

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{2} \sqrt{\frac{m}{I_s}}}.$$

Źródło:
Zadanie pochodzi z „Druk OF” 78/79 r.

Komitēt Główny Olimpiady Fizycznej w Szczecinie
www.of.szc.pl