XXVII OLIMPIADA FIZYCZNA ETAP WSTĘPNY
Zadanie doświadczalne

Rozwiąż wybrane przez siebie dwa zadania spośród poniższych trzech:

ZADANIE D1

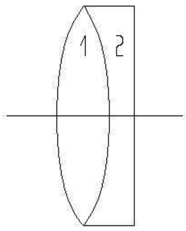
Nazwa zadania: „Trójkąt równoboczny utworzony z kulek połączonych sprężynkami"

A. a) Trzy jednakowe, niewielkie kulki o masach m połączono jednakowymi, nieważkimi sprężynkami o stałych sprężystości k tworząc trójkąt równoboczny. Początkowo opisany układ znajdował się w stanie równowagi leżąc na poziomym, gładkim stole.

Jaki będzie okres drgań, jeżeli wszystkie trzy kulki jednocześnie odciągniemy nieco od położenia początkowego do nowych pozycji tworzących inny trójkąt równoboczny i puścimy pozwalając układowi wykonywać swobodny ruch drgający?

b) Jednorodną, cienką gumkę o masie *M* i stałej sprężystości *K* zwinięto w okrąg, a końce połączono na stałe. Gumka początkowo leży na poziomym gładkim stole. Jaki będzie okres małych drgań gumki, jeżeli rozciągniemy ją symetrycznie tworząc większy okrąg i puścimy?

B. Z dwóch różnych rodzajów szkła chcemy zbudować soczewkę cienką o jednakowej ogniskowej dla skrajnych obszarów widma widzialnego (czerwień i fiolet). Zdolność skupiająca soczewki dla tych obszarów widma ma być równa D, a przekrój soczewki wzdłuż osi optycznej ma być taki, jak na rysunku 1. Współczynniki załamania obu rodzajów szkieł dla promieni czerwonych i fioletowych wynoszą odpowiednio $n_{1c}, n_{1f}, n_{2c}, n_{2f}$. Wyznacz promienie krzywizny obu powierzchni zakrzywionych.



Rys. 1

C. Pod tłokiem cylindra znajduje się rtęć o objętości V_r oraz *k* moli gazu doskonałego. Pole powierzchni tłoka wynosi S. Tłok i dno cylindra są wykonane z materiału doskonale zwilżanego przez rtęć. Rtęć pod tłokiem przyjęła kształt o symetrii obrotowej pokazany na rysunku 2. Na tłok jest wywierana siła F.

a) Wyprowadź równanie stanu dla układu rtęć + gaz w postaci p = f(V, T), gdzie T oznacza temperaturę bezwzględną, a V — objętość pod tłokiem; p=F/S.

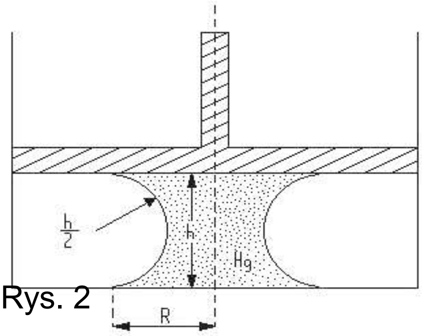
b) Znajdź warunek, przy którym p= 0.

Napięcie powierzchniowe rtęci wynosi σ .

Siłę ciężkości zaniedbujemy. Przyjmujemy, że objętość rtęci i jej napięcie powierzchniowe σ są stale (tzn. nie zależą od T i P) i że h << R.

ROZWIĄZANIE ZADANIA D1

A. a) Niech wydłużenie sprężynek po rozciągnięciu wynosi Δl. Promień koła opisanego na trójkącie, utworzonym przez kulki, po rozciągnięciu sprężynek wzrośnie $\Delta r = \Delta l / \sqrt{3}$. Takie jest odchylenie każdej kulki od położenia równowagi. Siłą działająca na każdą kulkę jest wypadkową napięć sprężynek do niej przyczepionych. Napięcie każdej sprężynki jest równe $k\Delta l$. Wypadkowa dwóch takich sił tworzących kąt 60^0 wynosi



Rys. 2

$$F = \sqrt{3}k\Delta l = 3k\Delta r\,.$$

Zatem przyspieszenie każdej z kulek jest równe

$$a = \frac{F}{m} = -\frac{3k}{m}\Delta r.$$

Znak minus napisaliśmy tu, dlatego, że siła jest przeciwnie zwrócona do wychylenia każdej z kulek. Szukany okres drgań jest, więc równy

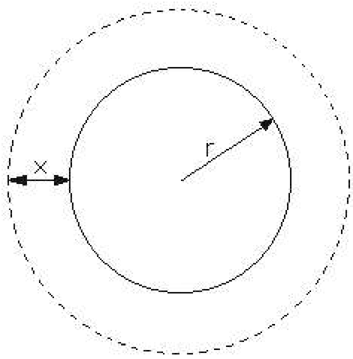
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{3k}}\,.$$

b) W przypadku gumki tworzącej okrąg możemy postąpić następująco: Obliczamy energię całkowitą układu w zależności od x i dx/dt (rys. 3).

Energia potencjalna wynosi

$$\frac{1}{2}K(\Delta l)^2 = 2K\pi^2 x^2.$$

Ściśle biorąc nie jest to energia potencjalna, lecz zmiana energii potencjalnej gumki związana z jej rozciągnięciem; ale w rozważanym tu problemie nie ma to istotnego znaczenia.



Rys. 3

Energia kinetyczna jest równa

$$\frac{1}{2}M\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

Wobec tego energia całkowita wynosi

$$E = \frac{1}{2}M\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2K\pi^2 x^2.$$

Wyrażenie na energie ma identyczną postać, jak dla zwykłego oscylatora harmonicznego

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}k`x^2,$$

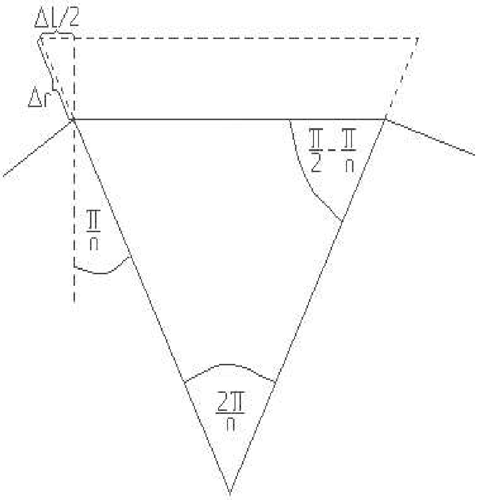
jeżeli przyjąć

$$m = M \text{ i } k` = 4\pi^2 K.$$

Zatem szukany okres drgań wynosi

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k`}} = \sqrt{\frac{M}{K}}.$$

Rozważony problem można rozwiązać inaczej. Mianowicie przyjąć, że gumka nie jest jednorodna, lecz składa się z n mas punktowych M/m, połączonych w foremny wielobok za pomocą n sprężynek, każda o stałej sprężystości nK (dlaczego akurat nK?)



Rys. 4

Niech wydłużenie każdej ze sprężynek po rozciągnięciu wynosi Δl. Promień koła opisanego na wieloboku, wyznaczonym przez masy punktowe, po rozciągnięciu sprężynek wzrośnie o

$$\Delta r = \frac{\Delta l}{2\sin\frac{\pi}{n}},$$

co natychmiast wynika z rysunku 4. Siła działająca na każdą z mas jest wypadkową napięć sprężynek do niej przyczepionych. Napięcie każdej sprężynki wynosi $nK\Delta l$ Wypadkowa dwu takich sił tworzących kąt $2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}\right)$ wynosi

$$F = -2nK\Delta l \sin\frac{\pi}{n} = -4\sin^2\frac{\pi}{n} nK\Delta r.$$

Przyspieszenie każdej z mas wynosi

$$a = \frac{F}{M/n} = -\frac{4\sin^2\frac{\pi}{n} n^2 K}{M}\Delta r.$$

Stąd

$$T = \frac{\pi}{n\sin\frac{\pi}{n}}\sqrt{\frac{M}{K}}.$$

W przypadku gumki mamy sytuację ograniczoną odpowiadającą $n \to \infty$. Przechodząc z n do nieskończoności, z ostatniego wzoru dostajemy

$$T = \sqrt{\frac{M}{K}},$$

czyli wzór identyczny z otrzymanym poprzednią metodą.

B. Promień krzywizny zewnętrznej powierzchni zakrzywionej oznaczmy przez R, a wewnętrznej przez r. Mamy

$$D_{1c} = (n_{1c}-1)\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{r}\right), \qquad D_{1f} = (n_{1f}-1)\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{r}\right),$$

$$D_{2c} = (n_{2c}-1)\left(-\frac{1}{r}\right), \qquad D_{2f} = (n_{1f}-1)\left(-\frac{1}{r}\right).$$

Stąd

$$D_c = (n_{1c}-1)\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{r}\right)+(n_{2c}-1)\left(-\frac{1}{r}\right)$$
$$D_f = (n_{1f}-1)\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{r}\right)+(n_{2f}-1)\left(-\frac{1}{r}\right).$$

Ponieważ z założenia

$$D_c = D_f = D,$$

więc

$$(n_{1c}-1)\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{r}\right)+(n_{2c}-1)\left(-\frac{1}{r}\right)=D,$$

$$(n_{1f}-1)\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{r}\right)+(n_{2f}-1)\left(-\frac{1}{r}\right)=D.$$

Mamy tu dwa równania z dwiema niewiadomymi *R* i *r*. Rozwiązując je otrzymujemy:

$$R=\frac{1}{D}\,\frac{n_{1f}n_{2c}-n_{1c}n_{2f}+n_{1c}-n_{1f}-n_{2c}+n_{2f}}{n_{1f}-n_{2f}-n_{1c}-n_{2c}},$$

C. a) Niech ciśnienie gazu równa się P, a pole powierzchni tłoka, zwilżanej przez rtęć, niech równa się S_r. W stanie równowagi

$$pS=P(S-S_r)+S_r\left(P-\frac{\sigma}{h/2}\right),$$

czyli

$$pS=PS-\frac{2\sigma}{h}S_r.$$

Wyrażenie $2\sigma/h$ oznacza ciśnienie związane z napięciem powierzchniowym rtęci. Uwzględnione tu, że h << R.

Równanie stanu gazu ma postać:

$$P(V-V_r)=kR_0T,$$

gdzie V oznacza objętość pod tłokiem R_g jest słała| gazową, a V_r — objętością rtęci. Dla h << R

$$V_r=S_rh.$$

Korzystając z warunku równowagi równanie stanu można zapisać w postaci

$$p_0=\frac{kR_gT}{V-V_r}-\frac{A}{V^2}$$

gdzie $A=2\sigma V_rS.$ Jest to odpowiedź na punkt a.

b) Przyrównując p do zera wyznaczamy V

$$V_{1,2}=\frac{A\pm\sqrt{A^2-4kR_gV_rA}}{2kR_gT}.$$

Aby pierwiastek kwadratowy miał sens, konieczne jest by

$$A=4kR_gV_r,$$

skąd

$$\sigma=2kR_gT/S.$$

Źródło:
Zadanie pochodzi z „Druk z OF” 77/78r.

Komitet Okregowy Olimpiady Fizycznej w Szczecinie
www.of.szc.pl