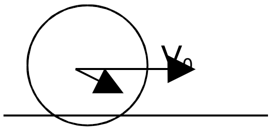
XXVII OLIMPIADA FIZYCZNA ETAP III
Zadanie teoretyczne

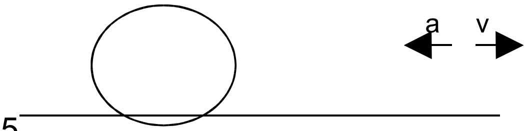
ZADANIE T2

Na poziomym stole umieszczono kulkę o promieniu r nadając jej poziomą prędkość początkową v_0. jednocześnie kulkę wprawiono w ruch wirowy wokół osi poziomej przechodzącej przez środek i prostopadłej do v_0. początkowa prędkość kątowa kulki ω_0 spełnia warunek $v_0 = \omega_0 r$. Kierunek i prędkości liniowej i kątowej pokazano na rysunku 44. współczynnik tarcia posuwistego kulki o stół wynosif, a potoczystego k. Opisz ilościowo i przedyskutuj jakościowo ruch kulki w przypadku, gdy 5k < 7 fr.



Rys.44

Rys.45



ROZWIĄZANIE ZADANIA T2

Załóżmy najpierw, że kulka cały czas porusza się bez poślizgu.

Wtedy r = ωr. Na rysunku 45 pokazano przyjęte za dodatnie zwroty: momentu tarcia potoczystego M, opóźnienia kątowego ε, opóźnienia liniowego a i prędkości liniowej v. Korzystając z podanych oznaczeń możemy napisać następujące równania:

$$I\varepsilon = M - Tr,$$
$$Ma = T,$$
$$M = kgm,$$
$$a = \varepsilon r$$

I oznacza moment bezwładności kulki: $I = 2/5\, mr^2$.

Pierwsze równanie wyraża drugie prawo dynamiki dla ruchu obrotowego. Drugie równanie wyraża to prawo w odniesieniu do ruchu postępowego środka masy kulki. Trzecie równanie opisuje fakt, że przy toczeniu moment tarcia potoczystego ma największą możliwą wartość. Ostatnie równanie jest konsekwencją założenia, że nie ma poślizgu. O sile tarcia *T* na razie nic nie można powiedzieć. W szczególności nie można twierdzić, że jest ona równa zeru.

Z wypisanych równań bez trudu można wyznaczyć T,a i ε. Po krótkich rachunkach otrzymujemy

$$T = \frac{5kmg}{7r},$$

$$a = \frac{5kg}{7r},$$

$$\varepsilon = \frac{5kg}{7r^2}.$$

Widzimy, że dla k$\neq 0$ siła tarcia *T* jest różna od zera, chociaż nie ma poślizgu. I nie powinno to nas dziwić. Gdyby bowiem T równało się zeru, to jaka siła mogłaby kulkę zatrzymać?

Jak wiadomo musi byćspełniony warunek

$$T = T_{max} = fmg.$$

W naszym przypadku mamy

$$\frac{5kg}{7r} \leq fmg,$$

czyli

$$5k \leq 7fr$$

Warunek podany w tekście zadania nie przeczy tej nierówności.

Widzimy więc, że kulka będzie poruszała się ruchem jednostajnie opóźnionym. Odnosi się to zarówno do ruchu postępowego, jak i obrotowego. Czas trwania ruchu będzie równy

$$t = \frac{v_0}{a} = \frac{7v_0 r}{5kg}$$

niezależnie od masy kulki.

Obliczanie innych wielkości charakteryzujących ruch, takich jak droga środka kuli, liczba obrotów itp., pozostawiamy Czytelnikowi.

W ten sposób zadanie zostało prawie rozwiązane. Dlaczego „prawie"? otóż dlatego, że na początku założyliśmy brak poślizgu. Dla zupełności rozważań założenie to należy uzasadnić. Można to robić wieloma sposobami. Jeden z ciekawszych sposobów jest następujący. Polega on na wykazaniu, że poślizg musi zniknąć, gdyby w ogóle był. Ponieważ zaś na początku poślizgu nie było, więc jasne jest, że nie może go być w ciągu całego ruchu.

Przyjmijmy najpierw, że w pewnej chwili mamy poślizg, przy którym $v_0 > \omega_0 r$. Korzystając z oznaczeń takich jak na rysunku 45 możemy napisać następujące równania

$$I\varepsilon = M - Tr,$$
$$ma = T,$$

gdzie $I = \frac{2}{5}mr^2$, a M i T przyjmują swe maksymalne wartości równe odpowiednio *kgm i fmg.*

Stąd bez trudu znajdujemy a i V:

$$a = fg,$$

$$\varepsilon = \frac{5g}{2r^2}(k - fr).$$

Zatem prędkości kulki muszą się zmieniać według wzorow:

$$v = v_0 - fgt,$$
$$\omega = \omega_0 - \frac{5g}{2r^2}(k - fr)t.$$

Zbadajmy teraz, czy przy zmieniających się prędkościach poślizg istotnie może zniknąć i po jakim czasie to nastąpi. Jeżeli przez t_1 oznaczymy czas, po jakim ma zniknąć poślizg, to powinniśmy mieć spełnioną zależność

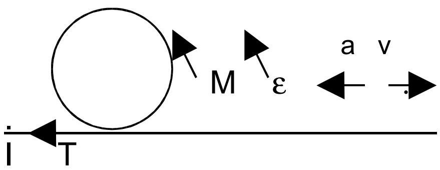
$$v(t_1) = \omega(t_1)r,$$

czyli

$$v_0 - fgt_1 = \omega_0 r - \frac{5g}{2r}(k - fr)t_1$$

Stąd

$$t_1 = \frac{2(v_0 - \omega_0 r)g}{7f - 5k/r}$$



Rys.46

Wielkość ta dla $7fr.5k$ jest dodatnia i skończona. Oznacza to, że poślizg rzeczywiście zniknie po czasie t_1 od chwili początkowej, w której był spełniony związek $v_0.\omega_0 r$. Zwróćmy uwagę, że wniosek ten dla $7fr \le 5k$ był niesłuszny.

A teraz rozpatrzmy przypadek, gdy $v_0,\omega_0 r$. Przyjmując oznaczenia takie jak na rysunku 46 ,możemy napisać następujące równania:

$$I\varepsilon = M + Tr$$

$$ma = T$$

$$T = fmg, M = kmg$$

Postępując podobnie, jak poprzednio, stwierdzamy, że poślizg zniknie po pewnym czasie t_2 >0, co kończy nasze rozważania.

Źródło:
Zadanie pochodzi z „Druk OF”

Komitet Okręgowy Olimpiady Fizycznej w Szczecinie
www.of.szc.pl