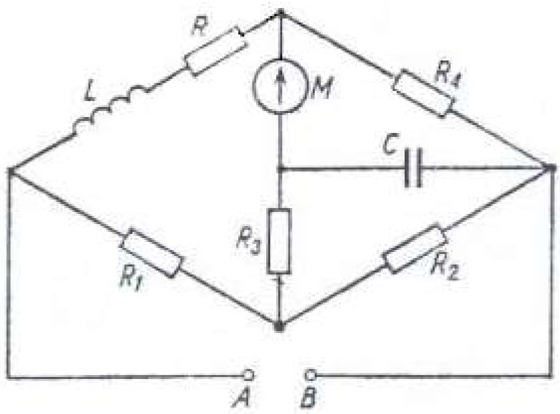
XXVII OLIMPIADA FIZYCZNA ETAP I
Zadanie doświadczalne

ZADANIE D2

Nazwa zadania:

Wykaż, że jeżeli wartość oporów R, R_1, R_2, R_3, R_4 oraz pojemność C są tak dobrane, że przez miernik M (rys. 2) nie płynie prąd niezależnie od tego, czy do AB jest włączone źródło napięcia stałego, czy zmiennego, to $L = C\dfrac{R_4}{R}(R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1)$.



Rys. 2

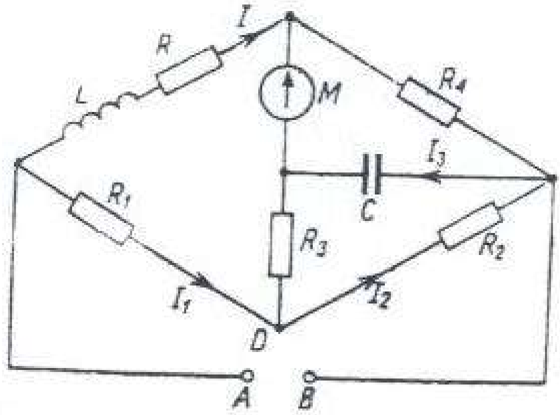
Następnie korzystając z powyższego wyniku oraz zestawu przyrządów, podanego niżej, wyznacz opór omowy R oraz indukcyjność L cewki uzwojenia pierwotnego transformatora głośnikowego. Opisz dokładnie wykonanie doświadczenia. Oszacuj błąd wyniku.

Zestaw przyrządów: 2 oporniki o stałym i znanym oporze, 2 opornice dekadowe, miernik uniwersalny (amperomierz prądu stałego i zmiennego), kondensator o znanej wartości pojemności, źródło stałego napięcia (bateryjka), źródło napięcia zmiennego (transformator dzwonkowy), kable połączeniowe.

ROZWIĄZANIE ZADANIA D2

Metoda I polega na rozwiązaniu równań Kirchhoffa dla podobnego obwodu, przy założeniu, że przez miernik nie płynie prąd.

Kierunki prądów przyjmujemy jak na rysunku 3.



Rys.3

Z pierwszego prawa Kirchhoffa dla węzła D

$$I_1+I_3=I_2. \quad (1)$$

Dla lewego trójkąta:

$$L\frac{dI}{dt}+RI+R_3 I_3-R_1 I_1=0. \quad (2)$$

Dla górnego trójkąta po prawej stronie:

$$R_4 I+\frac{1}{C}\int_0^t I_3\,dt=0. \quad (3)$$

Zakładamy, że początkowy ładunek na kondensatorze jest równy zeru. Zawsze można to osiągnąć zwierając kondensator przed pomiarem.
Dla trójkąta dolnego po prawej stronie:

$$\frac{1}{C}\int_0^t I_3\,dt+R_3 I_3+R_2 I_2=0. \quad (4)$$

Z warunku, że E = const przez *M* nie płynie prąd, wynika:

$$R_1 R_4-RR_2=0. \quad (5)$$

Podstawiamy I_2 z równania (1) do równania(4). Razem z (2) i (3) otrzymamy układ równań:

$$L\frac{dI}{dt}+RI+R_3 I_3-R_1 I_1=0, \quad (a)$$

$$R_4 I+\frac{1}{C}\int_0^t I_3\,dt=0, \quad (b)$$

$$\frac{1}{C}\int_0^t I_3\,dt+R_3 I_3+R_2 I_1+R_2 I_3=0 \quad (c)$$

z warunkiem (5).
Na pierwszy rzut oka wydaje się, że otrzymany układ równań całkowo – różniczkowych jest trudny do rozwiązania na poziomie szkolnym. Okazuje się jednak, że wszystko, co trzeba, da się tu policzyć.
Mamy bowiem z (3):

$$I=\frac{-1}{CR_4}\int_0^t I_3\,dt,$$

zatem na podstawie (2) otrzymujemy:

$$-\frac{L}{CR_4}I_3-\frac{R}{CR_4}\int_0^t I_3\,dt+R_3 I_3-R_1 I_1=0.$$

$$\frac{1}{C}\int_0^t I_3\,dt+R_3 I_3+R_2 I_1+R_2 I_3=0.$$

Z drugiego z tych równań wyznaczamy I_1 i wstawiamy do równania pierwszego:

$$I_1=-\frac{1}{CR_2}\int_0^t I_3\,dt-\frac{R_3}{R_2}I_3-I_3,$$

$$-\frac{L}{CR_4}I_3-\frac{R}{CR_4}\int_0^t I_3\,dt+R_3 I_3+\frac{R_1}{CR_2}\int_0^t I_3\,dt+\frac{R_1 R_3}{R_2}I_3+R_1 I_3=0.$$

Ale

$$\frac{R}{R_4}=\frac{R_1}{R_2},$$

więc

$$-\frac{L}{CR_4}I_3+R_3 I_3+\frac{R_1 R_3}{R_2}I_3+R_1 I_3=0.$$

Po podzieleniu przez $I_3(I_3\neq 0)$ otrzymujemy:

$$-\frac{L}{CR_4}+R_3+\frac{R_1 R_3}{R_2}+R_1=0,$$

Ostatecznie

$$L=C\frac{R_4}{R_2}(R_1 R_2+R_2 R_3+R_3 R_1).$$

Metoda II polega na wprowadzeniu oporów urojonych dla pojemności i indukcyjności. Otrzymujemy następujący układ równań dla równowagi mostka (przez miernik M nie płynie prąd).

Natężenie prądu I płynącego przez cewkę, opór C i opór R_4 wynosi

$$I=\frac{E}{(i\omega L+R+R_4)},$$

gdzie E jest napięciem źródła prądu zmiennego o częstości ω zasilającego mostek.

Natężenie prądu I płynącego przez cewkę, opór C i opór R_1 wynosi

$$I_1=\frac{E}{(R_1+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{(R_3+\frac{1}{(i\omega C)})})}=\frac{(E(R_2+R_3+(\frac{1}{(i\omega C)})))}{(R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3+\frac{(R_1+R_2)}{(i\omega C)})}.$$

Spadek napięcia U_1 na oporze R_2 wynosi

$$U_1=I_1\frac{1}{(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{(R_3+\frac{1}{(i\omega C)})})}=I_1\frac{(R_2(R_3+\frac{1}{(i\omega C)}))}{(R_2+R_3+\frac{1}{(i\omega C)})}.$$

Natężenie prądu I_3 płynącego przez opór R_3 i pojemności wynosi

$$I_3=\frac{U_1}{(R_3+\frac{1}{(i\omega C)})}.$$

Ze względu na to, że przez miernik nie płynie prąd spadek napięcia U_2 na pojemność C wynoszący

$$U_2=I_3\frac{1}{(i\omega C)}$$

oraz spadek napięcia U_3 na oporze R_4 wynoszący

$$U_3=IR_4$$

muszą być sobie równe

$$U_3=U_2.$$

Po podstawieniu odpowiednich wyrażeń na natężenia prądów i skorzystaniu ostatniej równości otrzymujemy

$$\frac{R_2}{(i\omega C(R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3+\frac{(R_1+R_2)}{(i\omega C)}))}=\frac{R_4}{(i\omega L+R+R_4)}.$$

skąd

$$R_4 i\omega C(R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3)+R_1R_4+R_2R_4=R_2 i\omega L+RR_2+R_2R_4.$$

Wobec tego muszą być spełnione następujące równania: na część rzeczywistą

$$R_1R_4-RR_2=0$$

i część urojona

$$R_4 \omega C (R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3) - R_2 \omega L = 0$$

a więc

$$R = \frac{(R_1 R_4)}{R_2}$$

oraz

$$L = C \frac{R_4}{R_2} (R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3).$$

Powyższe warunki wystarczają, aby mostek był w równowadze dla dowolnej częstości. W szczególności dla częstości w = o (prąd stały) wystarczy warunek pierwszy.

Źródło:
Zadanie pochodzi z „Druk OF”

Komitet Okręgowy Olimpiady Fizycznej w Szczecinie
www.of.szc.pl