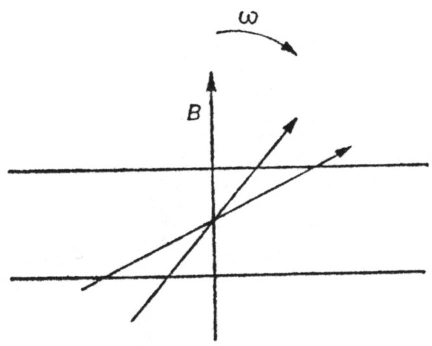
XXVI OLIMPIADA FIZYCZNA ETAP III
Zadanie teoretyczne

ZADANIE T3

Nazwa zadania: „Rura w wirującym polu”

W wirującym z prędkością kątową ω polu magnetycznym o indukcji B znajduję się długa, cienkościenna rura miedziana otwarta z obu końców (rys. 88). Oś rury leży w płaszczyźnie wirowania pola. Wymiary rury: długość l, promień wewnętrzny $r \ll l$, grubość rury $d \ll r$.Opór właściwy materiału rury ρ. Oblicz chwilową wartość natężenia prądu opływającego rurę dookoła, czyli natężenie prądu przepływającego przez przekrój ścianki rury półpłaszczyzną wychodzącą z osi symetrii rury. Dla jakich wartości ω można zaniedbać samoindukcję rury?



Rys.88

ROZWIĄZANIE ZADANIA T3

Wirujące pole magnetyczne wygodnie jest rozłożyć na składowe w kierunku osi rury i w kierunku prostopadłym (rys. 89);

$$B_{\perp} = B\cos \mathrm{A}\omega t\,,$$

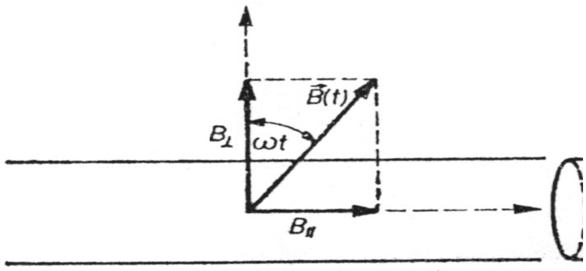
$$B_{II} = B\sin \omega t\,.$$

Ze względu na zasadę superpozycji w elektrodynamice prądy indukowane w rurze możemy wyznaczyć niezależnie jako pochodzące od B_{II} i $B_{\perp}$, a następnie dodać .Łatwo jednak zauważyć, że ze względu na symetrię, pole $B_{\perp}$ nie da wkładu do całkowitego prądu płynącego wokół osi rury. Wyjaśnia to rysunek linii prądu w tym polu (rys. 90).Dla celów zadania można więc pole wirowe zastąpić polem:

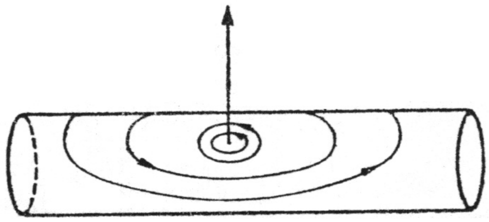
$$B_{II} = B\sin \omega t\,. \qquad (1)$$

Przypuśćmy, że pole magnetyczne spowodowane wyindukowanym prądem można zaniedbać. Wtedy siła elektromotoryczna indukcji w obwodzie, jaki stanowi rura, jest dana prostym wzorem:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\pi r^2 B\omega \cos\omega t. \tag{2}$$



Rys.89



R ys.90

Całkowity opór walca dla prądu opływającego go dookoła dany jest prawem Ohma:

$$R = \frac{2\pi r\rho}{ld}. \tag{3}$$

Natężenie prądu zatem:

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = -I_o \cos\omega t, \qquad I_o = \frac{Br\omega ld}{2\rho}. \tag{4}$$

Warunkiem na stosowalność powyższego wzoru jest możliwość zaniedbania pola magnetycznego wytworzonego przez ten prąd w porównaniu z polem zewnętrznym. Amplitudę pola magnetycznego $\bar{B}$ wytworzonego przez prąd (4) obliczamy ze znanego wzoru dla solenoidu:

$$\bar{B}_0 = \mu_o \frac{I_0}{l} = \mu_o \frac{Br\omega d}{2\rho}. \tag{5}$$

Warunek $\bar{B}_o << B$ przyjmuje więc postać:

$$\mu_o \frac{Br\omega d}{2\rho} << B, \text{ czyli } \omega << \frac{2\rho}{\mu_o rd}. \tag{6}$$

Widać, że dla dostatecznie małych częstości przybliżenie poczynione w rozwiązaniu jest usprawiedliwione. Okazuje się, że zadanie powyższe można rozwiązać bez zaniedbania samoindukcji rury, to znaczy dla dowolnych częstości. A oto rozwiązanie ścisłe. Powołując się na analogię tego problemu z obwodem RL,do którego przyłożono napięcie zmienne, poszukamy rozwiązania w postaci:

$$I = -I_o \cos(\omega t + \delta), \tag{7}$$

gdzie amplituda I_o i faza δ są do wyznaczenia. Całkowite pole magnetyczne w rurze pochodzi od dwóch czynników: pola zewnętrznego i pola wytworzonego przez prąd (7). Zatem siła elektromotoryczna wynikająca z prawa Faradaya wynosi:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= -\pi r^2 \frac{d}{dt}\left(B \sin\omega t - \mu_o \frac{I_o}{l}\cos(\omega t + \delta)\right) = \\ &= -\pi r^2 \left[B\omega \cos\omega t + \mu_o \omega \frac{I_o}{l} \sin(\omega t + \delta) \right]. \end{aligned} \tag{8}$$

Prąd I dany wzorem (7) i siła elektro motoryczna dana wzorem (8) muszą spełniać prawo Ohma:

$$\varepsilon = RI, \tag{9}$$

czyli po podstawieniu odpowiednich wyrażeń:

$$-RI_o \cos(\omega t + \delta) = -\pi r^2 \left[B\omega \cos\omega t + \mu_o \omega \frac{I_o}{l} \sin(\omega t + \delta) \right]. \tag{10}$$

Korzystając z wzorów trygonometrycznych na sinus i kosinus sumy kątów, a następnie grupując wyrazy proporcjonalne do $\sin\omega t$ i $\cos\omega t$, dostajemy po podzieleniu stronami przez πr^2 :

$$\cos t \left[B\omega + \mu_o \omega \frac{I_o}{l} \sin\delta - \frac{RI_o}{\pi r^2} \cos\delta \right] + \sin\omega t \left[\mu_o \omega \frac{I_o}{l} \cos\delta + \frac{RI_o}{\pi r^2} \sin\delta \right] = 0 \tag{11}$$

Równanie (11) ma być spełnione dla wszystkich chwil czasu, a to oznacza, że współczynniki przy $\sin\omega t$ i $\cos\omega t$ musza być równe zeru. Da nam to dwa równania, z których wyznaczymy I_o i δ,

$$\mu_o \omega \frac{I_o}{l} \cos\delta + \frac{RI_o}{\pi r^2} \sin\delta = 0, \tag{12}$$

$$B\omega + \mu_o \omega \frac{I_o}{l} \sin\delta - \frac{RI_o}{\pi r^2} \cos\delta = 0. \tag{13}$$

Z równania (12) znajdujemy bezpośrednio kąt δ :

$$tg\delta = -\frac{\mu_o \omega \pi r^2}{Rl}. \tag{14}$$

Równanie (13) przekształcamy korzystając ze wzoru (14):

$$B\omega = \frac{RI_o}{\pi r^2}\cos\delta\left(1 - \frac{\mu_o \omega \pi r^2}{Rl}\frac{\sin\delta}{\cos\delta}\right) = \\ = \frac{RI_o}{\pi r^2}\cos\delta\left(1 + tg^2\delta\right) = \frac{RI_o}{\pi r^2 \cos\delta} \qquad (15)$$

stąd dostajemy:

$$I_o = \frac{\pi r^2 B\omega}{R}\cos\delta = \frac{\pi r^2 B\omega}{R\sqrt{1 + tg^2\delta}} = \frac{\pi r^2 B\omega}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{\mu_o \pi r^2}{l}\omega\right)^2}}. \qquad (16)$$

Porównując z wynikiem na natężenie prądu w obwodzie RL widzimy, że samoindukcja rury jest dana wzorem:

$$L = \frac{\mu_o \pi r^2}{l}.$$

Poprzedni przybliżony rezultat na amplitudę prądu opływającego rurę będzie dobrym przybliżeniem, jeśli spełniona będzie nierówność:

$$\omega^2 << \left(\frac{Rl}{\mu_o \pi r^2}\right)^2. \qquad (17)$$

Nierówność (17) jest warunkiem słabszym od nierówności (6).

Źródło:
Zadanie pochodzi z „Druk OF”

Komitet Okręgowy Olimpiady Fizycznej w Szczecinie
www.of.szc.pl