XXV OLIMPIADA FIZYCZNA ETAP II
Zadanie doświadczalne.

ZADANIE D1

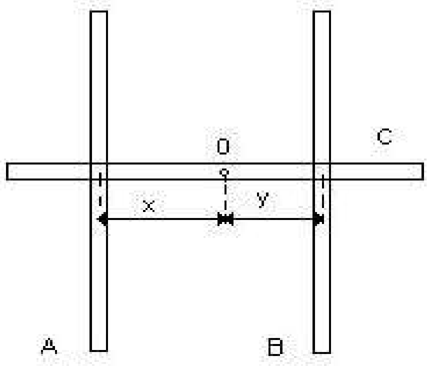
Nazwa zadania: „Drewniane pręty”

Mając do dyspozycji trzy pręty drewniane o przekroju kołowym, poziomy płaski stół oraz papier milimetrowy (przyklejony do stołu – służy między innymi do pomiaru odległości) wyznacz stosunek współczynników tarcia kinetycznego i statycznego prętów między sobą. Uzasadnij metodę. Omów i oszacuj błąd pomiaru.

ROZWIĄZANIE ZADANIA D1

Idea pomiaru opiera się na dobrze znanym doświadczeniu. Weźmy długi pręt i położymy go na wskazujących palcach szeroko rozstawionych dłoni. Rozsuwając palce powoli zauważymy, że pręt ślizga się na przemian to po jednym to po drugim palcu. Gdyby nie było różnicy między statycznym a kinetycznym współczynnikiem tarcia, to przebieg doświadczenia powinien być nieco inny. W pierwszej fazie (przy niesymetrycznym ułożeniu pręta) powinien on ślizgać się po palcu położonym dalej od środka ciężkości pręta (nacisk na ten palec jest mniejszy). W chwili osiągnięcia równej odległości naciski się zrównają i pręt powinien ślizgać się równo, aż do momentu zejścia się palców tuż pod środkiem ciężkości pręta. Różnice współczynników tarcia statycznego i kinetycznego powodują, że w chwili, gdy naciski pręta w palce zrównają się, aktualna siła tarcia kinetycznego jest mniejsza od maksymalnej siły tarcia statycznego na drugi palec. Zamiana rolami obu punktów podparcia nastąpi dopiero wtedy, gdy siła tarcia kinetycznego zrówna się z siłą tarcia statycznego, a to wskutek różnicy tych współczynników jest możliwe, gdy nacisk na ślizgający się punkt podparcia będzie odpowiednio większy od nacisku na punkt nieruchomy. W tym momencie doświadczenie zaczyna się jakby od początku, znów w niesymetrycznej sytuacji, tyle, że role punktów pod parcia odwracają się.

A oto wykonanie zadania.
Pręty ustawia się tak jak to wskazuje rys.28 (widok z góry).
Następnie przytrzymując ręką pręt *A* przesuwamy ręką pręt *B* w lewo tak długo, aż pręt *C* zatrzyma się. W tym położeniu mierzymy odległość y pręta *B* od środka *0* pręta *C* (odległość ta jest niezmienna w tej fazie doświadczenia, gdyż pręt *B* sunie z prętem *C* – między tymi prętami działa cały czas tarcie statyczne) oraz odległość *x* pręta *A*. W tym położeniu maksymalne tarcie w punkcie skrzyżowania *B* i *C* równoważy tarcie kinetyczne w punkcie skrzyżowania *A* i *C*.



Rys. 28

Naciski w tych punktach są oczywiście odwrotnie proporcjonalne do odległości *x* i *y*:

$$N_{BC}\, y = N_{AC}\, x \quad \text{(prawo momentów sił)}$$

Równość sił tarcia oznacza, że

$$f_k N_{AC} = f_s N_{BC}$$

Stąd stosunek współczynników tarcia kinetycznego i statycznego

$$\frac{f_k}{f_s} = \frac{N_{BC}}{N_{AC}} = \frac{x}{y}$$

Pomiary należy powtórzyć wiele razy startując z nieco różnych położeń wyjściowych, zamieniając pręty rolami itp. Jest to konieczne z tego powodu, że dla powierzchni niezbyt gładkich (wtedy głównie różnice między f_s i f_k są wyraźne) wartość siły tarcia maksymalnego może zależeć od konkretnych punktów styku. Stąd oczekiwane różnice w wynikach są dość znaczne. A oto przykładowe wyniki pomiarów uzyskane na jednym z zestawów.

y	x	$\frac{x}{y} = \frac{f_k}{f_s}$
5,3	4,1	0,77
5,2	2,8	0,54
6,7	4,5	0,67
5,5	4,2	0,76
5,5	5,0	0,90
6,5	5,0	0,78
6,0	4,5	0,75

$$\left(\frac{f_k}{f_s}\right)_{śr} = \frac{1}{7}\sum\left(\frac{x}{y}\right)_i = 0{,}74$$

Powstaje teraz pytanie jak oszacować błąd wyniku. W wielu pomiarach szkolnych do oceny błędu wystarczające jest pojęcie błędu maksymalnego. Jeżeli np. linką mierzymy długość jakiegoś pręta i za każdym razem odczytujemy 85mm, to jasne, że ze względu na rodzaj posiadanego przyrządu mamy prawo przypuszczać, iż prawdziwy wynik leży niemal na pewno w granicach (85 ± 0.5) mm.

Jeżeli wyznaczamy jakąś wielkość na podstawie dwóch lub niewielkiej liczby pomiarów tego typu, np. pole konkretnego prostokąta, to łatwo też ocenić błąd maksymalny, bowiem jeśli wiemy, iż

$$a_0 - \Delta a < a < a_0 + \Delta a,$$
$$b_0 - \Delta b < b < b_0 + \Delta b,$$

gdzie a_0 jest zmierzoną wartością (85 mm z naszego przykładu), a Δa jej błędem maksymalnym (0,5 mm w naszym przykładzie), to jest jasne że prawdziwe pole prostokąta *ab* leży w przedziale

$$(a_0 - \Delta a)(b_0 - \Delta b) < ab < (a_0 + \Delta a)(b_0 + \Delta b)$$

jeżeli wartości $\frac{\Delta a}{a}$ i $\frac{\Delta b}{b}$ są małe, to pomijając iloczyny dwóch małych wartości możemy podać nierówności przybliżone

$$a_0 b_0 \left(1 - \frac{\Delta a}{a_0} - \frac{\Delta b}{b_0}\right) < ab < a_0 b_0 \left(1 + \frac{\Delta a}{a_0} + \frac{\Delta b}{b_0}\right)$$

widzimy zatem, że maksymalny błąd względny iloczynu $\frac{\Delta(ab)}{ab}$ jest równy sumie błędów względnych $\frac{\Delta a}{a_0} + \frac{\Delta b}{b_0}$

Rozważania powyższe są zupełnie nieprzydatne do naszego przykładu, gdyż zmierzony w każdym przypadku stosunek współczynników jest wyraźnie inny. Załóżmy, więc, że istnieje pewna wielkość fizyczna, której prawdziwa wartość wynosi *a*. Wartości tej na ogół nie znamy – celem pomiaru jest uzyskanie liczby możliwie bliskiej tej wartości.

W wyniku pojedynczego pomiaru uzyskujemy wartość a_i (i = 1, 2, ... oznacza kolejny pomiar). Różnicę między tą wartością a wartością prawdziwą oznaczymy literą ξ_i zatem

$$a_i = a + \xi_i$$

Na to by w wyniku wielokrotnie powtarzanego pomiaru można było wyznaczyć a w miarę dokładnie, odchylenia ξ_i spowodowane różnymi przypadkowymi czynnikami powinny być raz dodatnie, raz ujemne, przy czym granica

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \xi_i = 0$$

powinna być równa zeru.

Założenie powyższe jest bardzo ważne i bynajmniej nie oczywiste. Ba, często nie jest ono prawdziwe! Argumenty za jego przyjęciem są następujące. Jeśli w konkretnym doświadczeniu

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i = b \neq 0$$

To fakt odstępstw wyników pomiarów musi mieć jakąś określoną przyczynę. Innymi słowy doświadczenie jest źle pomyślane, nie mierzymy tej wielkości, którą mierzyć byśmy chcieli. Błąd taki nazywamy błędem systematycznym, założymy, więc, że nasz pomiar wolny jest od tego błędu.

Bardzo ważnym kolejnym pojęciem jest średnie kwadratowe odchylenie pojedynczego pomiaru. Nazywamy tak wielkość

$$\sigma_0 = \sqrt{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\xi_i^2}$$

czyli

$$\sigma_0^2 = \frac{(a_1-a)^2+(a_2-a)^2+\ldots+(a_n-a)^2}{n}$$

(*n* bardzo duże).

Wielkość ta jest miarą rozrzutu wyników pojedynczego pomiaru wokół wartości prawdziwej. Do wyznaczenia tej wielkości wprost z definicji potrzebna jest znajomość *a*. W przybliżeniu tym lepszym im większe *n* możemy zastapić $\xi_i = a_i - a$ przez $a_i - \bar{a}$ gdzie $\bar{a} = \frac{\sum a_i}{n}$ jest średnią arytmetyczną pomiarów. Możemy też $\bar{a}$ traktować jako $a_{zmierzone}$ dużej liczby pomiarów i jak wzrasta dokładność wyniku ze wzrostem liczby pomiarów *n*?

Przez dokładność pomiaru należy rozumieć spodziewaną różnicę między wartością prawdziwą a, a wartością średnią z *n* pomiarów

$$blad = a_{zmierzone} - a = \frac{1}{n}\sum a_i - a = ?$$

korzystając z określenia wielkości ξ_i możemy napisać

$$a_{zmierzone} - a = \frac{1}{n}\sum\left(a+\xi_i\right) - a = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i$$

powiedzieliśmy już, że podstawowym założeniem jest fakt, iż powyższe wyrażenie dąży do zera, gdy $n\to\infty$. Ale w praktyce n jest skończone. Bardzo ważne jest zrozumieć, że zgodnie z prawami statystyki nie możemy przewidzieć, ile wynosi $a_{zmierzone}$ – *a* dla skończonego *n*. Jest to znów zmienna losowa.

Przypuśćmy, że oprócz nas jeszcze bardzo wiele osób (N) wykonało w identycznych warunkach identyczne pomiary – każdy z nich *n* pomiarów. Jedynie, co możemy obliczyć teoretycznie, to wartość średnią kwadratu błędu każdego z nas (przy założeniu, że $N\to\infty$). Co nam da taka średnia? Otóż ta właśnie średnia jest doskonałą miarą dokładności. Jest bardzo prawdopodobne, że nasza różnica $a_{zmierzone}$ – *a* uzyskana w jednym z *N* eksperymentów (powstałe *N -1* to tylko eksperymenty pomyślane, gdyby je faktycznie wykonano, celowe byłoby obliczenie wszystkich *nN* pomiarów!) będzie rzędu tej średniej. Dokładniejsze rozważania pozwalają obliczyć, jakie jest prawdopodobieństwo, że nasz błąd jest nie większy niż ta średnia (ok.68%), jakie jest prawdopodobieństwo, że nasz błąd jest nie większy niż 3 takie błędy (99,7%) itd.

Obliczamy, zatem teraz tę interesującą wielkość. Oznaczamy wielkości zmierzone w N eksperymentach symbolami $a^{\alpha}_{zmierzone}$, α=1,...,*N.* Każda z tych wielkości jest średnią arytmetyczną *n* pomiarów

$$a^{\alpha}_{zmierzone} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^{\alpha}$$

Błędem średnim kwadratowym danego typu eksperymentu *σ* nazywamy wielkość zdefiniowaną następująco

$$\sigma^2 = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}\left(a^{\alpha}_{zmierzone} - a\right)^2$$

korzystając z tego, że

$$a^{\alpha}_{zmierzone} - a = \frac{1}{n}\sum \xi_i^{\alpha}$$

(ξ_i^{α} błąd *i-tego* pomiaru w eksperymencie oznaczonym numerem *α*) mamy

$$\sigma^2 = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i^{\alpha}\right]^2 = \frac{1}{n^2}\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}\left(\xi_1^{\alpha}+\xi_2^{\alpha}+\ldots+\xi_n^{\alpha}\right)^2$$

Rozwińmy wyrażenie w nawiasie do kwadratu

$$\left(\xi_1^{\alpha}+\xi_2^{\alpha}+\ldots+\xi_n^{\alpha}\right)^2 = \left(\xi_1^{\alpha}\right)^2+\left(\xi_2^{\alpha}\right)^2+\ldots+\left(\xi_n^{\alpha}\right)^2+2\sum_{i>j=1}^{n}\xi_i^{\alpha}\xi_j^{\alpha}$$

otrzymujemy

$$\sigma^2 = \frac{1}{n^2}\lim_{N\to\infty}\left\{\left[\frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}\left(\xi_1^{\alpha}\right)^2+\frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}\left(\xi_2^{\alpha}\right)^2+\ldots+\frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}\left(\xi_n^{\alpha}\right)^2\right]\right.$$
$$\left.+2\left[\frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}\xi_1^{\alpha}\xi_2^{\alpha}+\frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}\xi_1^{\alpha}\xi_3^{\alpha}+\ldots+\frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}\xi_{n-1}^{\alpha}\xi_n^{\alpha}\right]\right\}$$

Pomiędzy wyrazami w pierwszym nawiasie kwadratowym a wyrazami w drugim nawiasie jest zasadnicza różnica. Każda z granic sum w pierwszym nawiasie jest dokładnie tą sumą, którą zdefiniowaliśmy jako σ_0^2 (wprawdzie zdefiniowaliśmy σ_0^2 jako średnią kwadratów $\left(\xi_i\right)^2$ z jednej serii pomiarów, ale jeśli wszystkie *N* eksperymentów zachodzi w identycznych warunkach, to ciąg $\xi_1^{(1)}\xi_1^{(2)}$... ma te same własności statystyczne co ciąg $\xi_1^{\alpha}\xi_2^{\alpha}\xi_3^{\alpha}$,...!). Średnich takich jest *n*, więc

$$\sigma^2 = \frac{1}{n^2}\underbrace{\left(\sigma_0^2 + \sigma_0^2 + \ldots + \sigma_0^2\right)}_{n} + \text{człony z drugiego nawiasu kwadratowego.}$$

Każdy ze skończonej liczby n(n – 1) członków w drugim nawiasie dąży jednak do zera. Można by dowodzić to ściśle, ale intuicyjnie jest jasne, że jeśli $\left(\xi_i^\alpha\right)^2$ są dodatnie i kumulują się przy sumowaniu po α, to wyrażenia typu $\xi_1^\alpha \xi_2^\alpha$ będą równie często dodatni jak i ujemne.

Ostatecznie

$$\sigma^2 = \frac{1}{n^2} n\sigma_0^2$$

$$\sigma = \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$$

Jest to fundamentalny rezultat. Przy ustalonym rozrzucie pojedynczego pomiaru σ_0 zwiększenie liczby pomiarów do obliczenia średniej powoduje, że zmienna losowa $a_{zmierzone} - a$ ma rozrzut malejący odwrotnie proporcjonalnie do $\sqrt{n}$.

W tej sytuacji jest jasne, że nawet znając σ nie potrafimy podać jakiegoś błędu maksymalnego. Moglibyśmy podać tabelkę (wynikającą ze szczegółowej analizy problemu), z jakimś prawdopodobieństwem nasz wynik (średnia z *n* pomiarów) leży w przedziale $a \pm k\sigma$ dla różnych *k*. Ponieważ tabelka ta jest uniwersalna, nikt jej nie podaje referując wynik pomiaru, a ograniczenia są jedynie do podania σ swojego eksperymentu. W praktyce, jeżeli np. wyniki dwóch różnych laboratoriów różnią się o σ lub nawet 2σ – nikt się jeszcze nie dziwi. Przy 3σ zaczyna występować niepokój. Gdy różnica sięga 5σ każdy jest niemal pewien, że to nie wynik fluktuacji statystycznej, lecz że przynajmniej jeden z pomiarów obarczony jest błędem systematycznym. Tan sam problem występuje oczywiście przy porównywaniu pomiarów z przepowiedniami teoretycznymi.

Dla zaspokojenia ciekawości czytelnika podamy tabelkę prawdopodobieństw, że wartość prawdziwa mieści się w granicach $a_{zmierzone} \pm k\sigma$.

k	1	2	3	4	4,892
Prawdopodobieństwo, że $\left\|\bar{a} - a\right\| < k\sigma$	0,683	0,954	0,997	0,99994	$1-10^{-6}$

Z tabelki tej wynika, że średnio, w co dwudziestym eksperymencie można spodziewać się między wartością średnią (zmierzoną) a prawdziwą, różnicy większej lub równej 2σ, tylko trzy razy na tysiąc – różnicy 3σ, a różnica 4,9σ lub większa ma szansę trafić się zaledwie raz na milion.

Znając już tak ważną wielkość możemy obliczyć ją dla naszego doświadczenia.

Pierwszym krokiem jest wyznaczenie σ0 (oczywiście w przybliżeniu, bo nie znamy $\frac{f_k}{f_s}$, a jedynie zmierzoną przez nas wartość średnią)

$$\sigma_0^2 = \frac{1}{7}\Big[(0{,}77-0{,}74)^2+(0{,}54-0{,}74)^2+(0{,}67-0{,}74)^2+(0{,}76-0{,}74)^2+$$
$$(0{,}90-0{,}74)^2+(0{,}78-0{,}74)^2+(0{,}74-0{,}74)^2\Big]=0{,}0109$$

$$\sigma_0 = 0{,}105,$$

$$\sigma = \frac{\sigma_0}{\sqrt{7}} = 0{,}040$$

Ostatecznie wynik podajemy w postaci

$$\frac{f_k}{f_s} = 0{,}74 \pm 0{,}04$$

Źródło:
Zadanie pochodzi z „Olimpiady fizyczne XXV i XXVI”
autor: Andrzej Szymacha

Komitet Okregowy Olimpiady Fizycznej w Szczecinie
www.of.szc.pl