XXV OLIMPIADA FIZYCZNA ETAP I
Zadania doświadczalne

ZADANIE D1

Nazwa zadania „Walec"

Zestaw przyrządów i materiałów:

- nieruchomy walec,
- nitka,
- obciążnik,

Na nieruchomym walcu o promieniu r jest nawinięta cienka, nieważka i nierozciągliwa nitka, na końcu której znajduje się mały obciążnik. Początkowo nić jest nawinięta do końca, a obciążnik znajduje się tuż przy walcu. W chwili $t_0 = 0$ obciążnikowi nadano prędkość v w kierunku prostopadłym do powierzchni walca. Nitka zaczyna się odwijać, a obciążnik oddalać od walca zataczając przy tym swoistą spiralkę. Zakładamy, że nawinięta część nitki nie ślizga się po walcu oraz że odwijająca się nitka cały czas leży w płaszczyźnie prostopadłej do osi walca.
Jak długość odwiniętej nitki zależy od czasu?
UWAGA: Zakładamy, że na omawiany układ nie działa siła ciężkości.

ROZWIĄZANIE ZADANIA D1

Jeżeli z punktu O zatoczymy okrąg o promieniu $A_1O,$ to punkt A odległy jest od rzeczywistego położenia punktu materialnego A_2 o tyle, o ile łamana B_1OB_2 różni się od łuku B_1B_2, tj. o $2r\left(tg\frac{\Delta\varphi}{2} - \frac{\Delta\varphi}{2}\right)$. Ale wiemy, że dla małych kątów $\frac{tgx - x}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. zatem w granicy $\Delta\varphi \to 0$ błąd wynikający z zastąpienia długości fragmentu trajektorii A_1A_2 długością łuku A_1A będzie dążył do zera. W szczególności

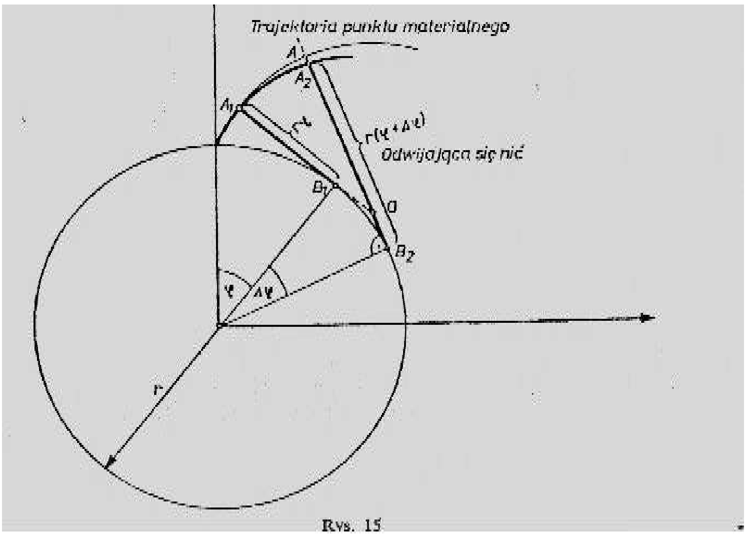
$$\frac{ds}{d\varphi} = \lim_{\Delta\varphi\to 0}\frac{A_1A_2}{\Delta\varphi} = \lim_{\Delta\varphi\to 0}\frac{A_1A}{\Delta\varphi} = \lim_{\Delta\varphi\to 0} A_1O = A_1B_1 = r\varphi,$$

czyli

$$\frac{ds}{d\varphi} = r\varphi. \qquad (1)$$

Jeżeli pochodna funkcji jest funkcją liniową, to sama funkcja musi być funkcją kwadratową

$$s = \frac{1}{2}r\varphi^2 + const. \qquad (2)$$



Rys. 1

Ponieważ kąt φ mierzymy od położenia początkowego, przeto dla $\varphi=0$ powinno być s=0, stąd wynika, że stała całkowania równa się zeru i ostatecznie

$$s = \frac{1}{2} r\varphi^2. \tag{3}$$

Z zasady zachowania energii mamy v = const, czyli

$$s = vt. \tag{4}$$

Przyrównując do siebie s ze wzoru (3) i (4) dostajemy

$$vt = \frac{1}{2} r\varphi^2. \tag{5}$$

Ale długość odwiniętej nitki jest równa

$$l = r\varphi. \tag{6}$$

Z wzorów (5) i (6) dostajemy po wyrugowaniu φ:

$$vt = \frac{1}{2r}\left(r\varphi^2\right) = \frac{1}{2r} l^2. \tag{7}$$

Skąd wyliczamy l w funkcji czasu

$$l = \sqrt{2rvt}. \tag{8}$$

Podamy jeszcze jeden, prostszy, ale za to dość trikowy sposób rozwiązania tegoż zadania.

Rozważmy mianowicie nie swobodny (to znaczy ze stałą energią) ruch punktu, lecz pewien ruch wymuszony taki, że prędkość kątowa, z jaką przemieszcza się punkt styczności nitki, jest stała. Oznacza to, że

$$\varphi = \omega t.$$

Przyglądając się rysunkowi widzimy, że w krótkim przedziale czasu ruch punktu możemy traktować jako ruch po okręgu o środku pokrywającym się chwilowo z punktem styczności nitki i z prędkością kątową ω, tą samą, z jaką zmienia się φ. Promień tego okręgu w danej chwili wynosi $l = r\varphi$. Prędkość liniowa w tym ruchu (czyli szybkość punktu materialnego)

$$v = l\omega = r\varphi\omega = r\omega t\omega = r\omega^2 t.$$

Jest to ruch z szybkością liniową zmienną. Droga przebyta w takim ruchu może być obliczona z tego samego wzoru co dla ruchu jednostajnie przyspieszonego:

$$s = \frac{1}{2} r\omega^2 t^2 = \frac{1}{2r}(r\omega t)^2 = \frac{1}{2r}(r\varphi)^2 = \frac{1}{2r} l^2.$$

Zależność s od l jest zależnością czysto geometryczną, niezależną od charakteru ruchu, a jedynie od kształtu toru. Ta sama zależność jest więc słuszna i w interesującym nas przypadku ruchu ze stałą prędkością.

W ruchu takim $s = vt$, co po podstawieniu do ostatniego równania daje

$$vt = \frac{1}{2r} l^2,$$

czyli

$$l = \sqrt{2rvt},$$

a więc tyle samo co w przypadku poprzednim.

Źródło:
Zadanie pochodzi z „Olimpiada fizyczna XXV i XXVI”
autor: A. Szymacha

Komitet Okregowy Olimpiady Fizycznej w Szczecinie
www.of.szc.pl