

XXIX OLIMPIADA FIZYCZNA ETAP WSTĘPNY

Zadanie teoretyczne

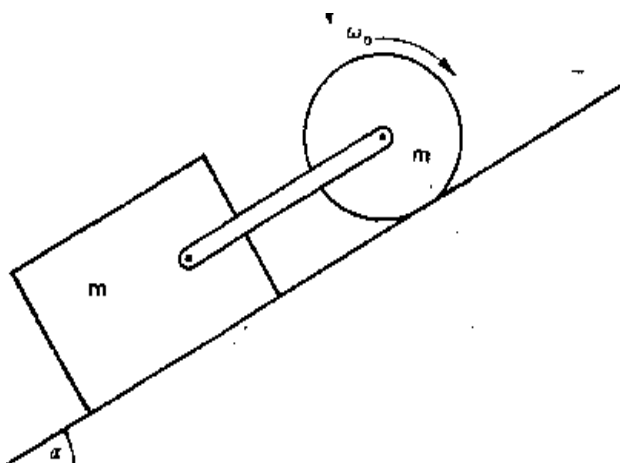
Rozwiąż wybrane przez siebie dwa zadania spośród podanych trzech:

ZADANIE T1

A. Przez opornik o oporze R płyną jednocześnie trzy prądy sinusoidalne o częstościach ω , 2ω i 7ω ($\omega \neq 0$). Spadek napięcia na końcach oporu R wyraża się wzorem:

$$E = E_1 \sin \omega t + E_2 \sin (2 \omega t + \alpha) + E_3 \sin (7 \omega t + \beta)$$

gdzie α i β są pewnymi stałymi. Oblicz napięcie i natężenie skuteczne prądu. Jak wielkości te wyrażają się przez wielkości skuteczne charakteryzujące każdy z trzech prądów składowych osobno?

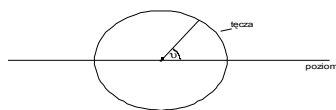


Rys.1

B. Kłócek o masie m umocowano na sztywno do osi pełnego walca o promieniu R i masie równej również m . Walec rozkręcono w kierunku pokazanym na rysunku, do prędkości kątowej ω_0 po czym i kłócek, i walec położono na równi o kącie nachylenia α . Współczynnik tarcia posuwistego walca o równię wynosi $f_1 = 5 \tan \alpha$, a współczynnik tarcia kłocka $f_2 = \tan \alpha$. Pręt łączący walec z klockiem jest równoległy do równi. Tarcie toczne i masę pręta pomijamy. Opisz ruch układu na równi.

C. Z wysokiej góry zaobserwowano tęczę w postaci pełnego okręgu. Przy obserwacji tęczy przez okulary polaryzacyjne stwierdzono, że natężenie światła zależy od kąta ϑ jak na rysunku. Najmniejsza wartość natężenia światła tęczy I wynosi $I_{\min}$ a największa $I_{\max}$. Wyznacz postać funkcji $I(\vartheta)$.

UWAGA: okulary polaryzacyjne wygaszają światło odbite od płaszczyzn poziomych.



Rys.2

ROZWIĄZANIE ZADANIA T1

A. Napięcie między końcami opornika o oporze R dane jest (zgodnie z warunkami zadania) wzorem:

$$E = E_1 \sin \omega t + E_2 \sin (2 \omega t + \alpha) + E_3 \sin (7 \omega t + \beta) \quad (1)$$

Ponieważ natężenie płynącego prądu jest wprost proporcjonalne do przyłożonego napięcia (prawo Ohma),

$$I = E/R$$

możemy podać od razu wzór na natężenie prądu płynącego przez opornik o oporze R :

$$I = I_1 \sin \omega t + I_2 \sin (2 \omega t + \alpha) + I_3 \sin (7 \omega t + \beta) \quad (2)$$

gdzie

$$I_1 = E_1/R \quad I_2 = E_2/R \quad I_3 = E_3/R$$

Skuteczna wartość napięcia (natężenia) jest zdefiniowana jako pierwiastek ze średniej kwadratowej wartości napięcia (natężenia) obliczonej dla jednego okresu T lub całkowitej liczby okresów.

$$E_{\text{sk}} := \left(\frac{1}{T} \cdot \int_0^T E^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \quad I_{\text{sk}} := \left(\frac{1}{T} \cdot \int_0^T I^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3)$$

gdzie T — oznacza okres funkcji $E(t)$ i $I(t)$.

W naszym przypadku $T = 2\pi/\omega$

Korzystając z tych definicji, obliczymy najpierw wartość skuteczną napięcia:

$$E_{\text{sk}} = \left[\frac{1}{T} \cdot \int_0^T \left(E_1 \sin \omega t + E_2 \sin(2 \omega t + \alpha) + E_3 \sin(7 \omega t + \beta) \right)^2 dt \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$(4) \left[\frac{1}{T} \int_0^T (E_1 \sin \omega t)^2 dt + \frac{1}{T} \int_0^T (E_2 \sin(2\omega t + \alpha))^2 dt + \frac{1}{T} \int_0^T \left(E_3 \sin(7\omega t + \beta) \right)^2 dt + \frac{(2E_1 E_2)}{T} \int_0^T (\sin \omega t \sin(2\omega t + \alpha)) dt + \frac{(2E_1 E_3)}{T} \int_0^T (\sin \omega t \sin(7\omega t + \beta)) dt + \frac{(2E_2 E_3)}{T} \int_0^T (\sin(2\omega t + \alpha) \sin(7\omega t + \beta)) dt \right]^{\frac{1}{2}}$$

(4)

Trzy pierwsze wyrazy sumy występującej w nawiasie wyrażenia (4) odpowiadają, zgodnie z definicją (3), kwadratowi wartości skutecznych napięcia E_{1sk}^2 , E_{2sk}^2 i E_{3sk}^2 . Pozostałe całki oznaczone występujące w nawiasie wyrażenia (4) równe są zeru. Można to sprawdzić na przykład korzystając ze wzoru na iloczyn sinusów dwóch kątów:

$$\sin \gamma \sin \delta = 0,5 [\cos(\gamma - \delta) - \cos(\gamma + \delta)]$$

oraz faktu, że całka z funkcji cosinus w przedziale jednego okresu jest równa zeru. Podobnie można sprawdzić, że:

$$E_{1sk}^2 = 0,5 E_1^2 \quad E_{2sk}^2 = 0,5 E_2^2 \quad E_{3sk}^2 = 0,5 E_3^2$$

Jako ostateczny wynik otrzymujemy:

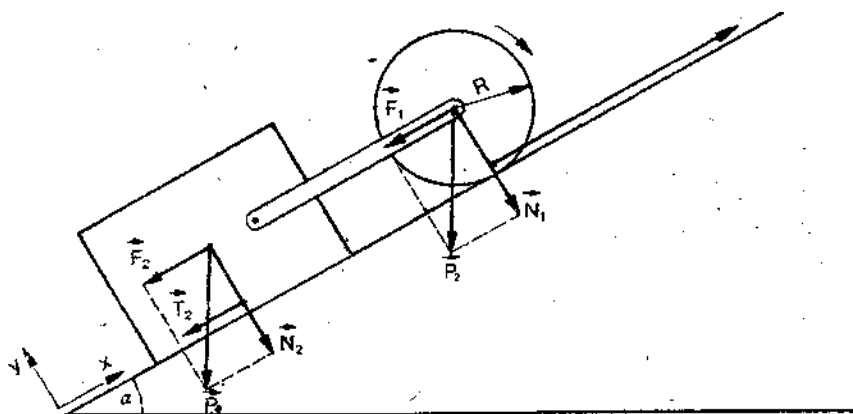
$$E_{sk} = (E_{1sk}^2 + E_{2sk}^2 + E_{3sk}^2)^{1/2} \quad (5)$$

Ze względu na analogiczną postać wzorów (1) i (2) możemy bez dalszych obliczeń podać żądane w zadaniu wyrażenie na wartość skuteczną natężenia prądu:

$$I_{sk} = (I_{1sk}^2 + I_{2sk}^2 + I_{3sk}^2)^{1/2} \quad (6)$$

Punktacja: 0-5 pkt

B. Na układ złożony z walca i klocka znajdujący się na równi pochyłej działają siły, których rozkład pokazano na rysunku 3. Siłą działającą na walec i klocek przypisano odpowiednio wskaźniki 1 i 2.



Rys. 3^a

P_1 i P_2 — siły ciężkości skierowane prostopadłe do podstawy równi,

N_1 i N_2 — siły nacisku na powierzchnię równi,

F_1 i F_2 — składowe ciężaru walca i klocka skierowane równoległe do powierzchni równi,

T_1 i T_2 — siły tarcia posuwistego działające na walec i na klocek {wektory T_1 i T_2 leżą w płaszczyźnie równi}.

Składowe prostopadłe do powierzchni równi wszystkich sił działających na układ równoważą się. Ponieważ siły decydujące o ruchu układu działają równoległe do powierzchni równi, będziemy w dalszym ciągu posługiwać się wartościami tych sił, określając ich znak przy założeniu, że zwrot ku górze równi jest dodatni. Wypadkowa siła działająca na układ jest równa

$$F = T_1 + T_2 + F_1 + F_2 \quad (1)$$

Jak się przekonamy, znak siły wypadkowej F jest dodatni. Warunki zadania są tak dobrane (masy walca i klocka oraz współczynniki tarcia), że tarcie posuwiste walca jest wystarczająco duże, aby poruszyć cały układ pod górę.

Siły tarcia posuwistego działające na walec i na klocek wynoszą odpowiednio:

$$T_1 = f_1 + N_1 \quad T_2 = -f_2 + N_2$$

gdzie: f_1 i f_2 - współczynniki tarcia posuwistego walca oraz klocka o równię, które z warunków zadania wynoszą

$$f_1 = 5 \operatorname{tg} \alpha \quad (2)$$

$$f_2 = \operatorname{tg} \alpha \quad (3)$$

Ponieważ masy walca i klocków są jednakowe równe m , zatem

$$N_1 = N_2 = mg \cos \alpha$$

stąd

$$T_1 = f_1 mg \cos \alpha \quad (4)$$

$$T_2 = -f_2 mg \cos \alpha \quad (5)$$

Składowe siły ciężkości walca i klocka równoległe do równi wynoszą odpowiednio:

$$F_1 = -mg \sin \alpha$$

$$F_2 = -mg \sin \alpha \quad (6)$$

Ostatecznie siła wypadkowa (1) działająca w pierwszej fazie ruchu na podstawie wyrażeń (4), (5), (6) wynosi

$$F = f_1 mg \cos \alpha - f_2 mg \cos \alpha - 2 mg \sin \alpha$$

Pod wpływem tej siły cały układ (ponieważ klocek i walec połączone są sztywnym prętem) porusza się ruchem postępowym z przyspieszeniem liniowym a . Równanie ruchu postępowego układu ma postać:

$$F = f_1 mg \cos \alpha - f_2 mg \cos \alpha - 2 mg \sin \alpha = 2 ma \quad (7)$$

stąd

$$a = 0,5 (f_1 - f_2) g \cos \alpha - g \sin \alpha \quad (8)$$

Jak widać znak tego przyspieszenia zależy od wartości współczynników tarcia w naszym przypadku uwzględniając warunki zadania (2), (3) mamy

$$a = g \sin \alpha \quad (9)$$

Otrzymaliśmy dodatnią wartość przyspieszenia układu, z takim więc przyspieszeniem odbywa się ruch postępowy całego układu w górę równi. Jednocześnie walec porusza się ruchem obrotowym, dla którego równanie ruchu obrotowego ma postać :

$$I_0 \varepsilon = T_1 R \quad (10)$$

gdzie : $T_1 R$ - moment siły tarcia posuwistego walca względem jego osi obrotu,

$I_0 = 0,5 m R^2$ - moment bezwładności walca względem jego osi.

Moment pozostałych sił względem tej osi równy jest zeru. Równanie (10) możemy napisać następująco :

$$0,5 m R^2 \varepsilon = f_1 m g \cos \alpha R$$

a uwzględniając warunek (2) otrzymamy

$$\varepsilon = (10 g \sin \alpha) / R \quad (11)$$

Jest to opóźnienie kątowe ruchu obrotowego walca spowodowane siłą tarcia posuwistego działającego na walec. Walec jest hamowany, zmniejsza się jego prędkość kątowa.

Prędkość punktów na obwodzie walca wynosi

$$v_w = R(\omega_0 - \varepsilon t) = \omega_0 R - 10 g t \sin \alpha$$

Prędkość ruchu postępowego układu wynosi

$$v_p = a t = g t \sin \alpha$$

Ruch walca odbywa się z poślizgiem, dopóki prędkość punktów na obwodzie walca v_w nie zrówna się z prędkością ruchu postępowego układu v_p . Zrównanie tych prędkości nastąpi po czasie t_1 który obliczamy z warunku $v_w = v_p$:

$$\omega_0 R - 10 g t \sin \alpha = g \sin \alpha \cdot t_1$$

stąd

$$t_1 = (\omega_0 R) / (11 g \sin \alpha) \quad (12)$$

W tym momencie prędkość ku górze równi wynosi

$$v_1 = a t_1 = 1/11 \omega_0 R \quad (13)$$

Droga przebyta przez układ w czasie t_1

$$S_1 = (v_1^2) / 2a$$

co po wykorzystaniu zależności (9) i (13) daje nam

$$s_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_0 \cdot R}{11} \right)^2 \cdot \frac{1}{g \sin \alpha}$$

W chwili t_1 przestaje działać siła tarcia posuwistego między walcem a powierzchnią równi. Rozpoczyna się druga faza ruchu, w której układ porusza się do góry hamowaną siłą

$$F' = T'_1 + T_2 + F_1 + F_2 \quad (14)$$

Przestaje działać siła tarcia posuwistego między walcem a powierzchnią równi ($T_1 = 0$), natomiast pojawia się siła tarcia statycznego między walcem a powierzchnią – T'_1 , która nie jest już dana wzorem (4). Tarcie toczne zgodnie z warunkami zadania możemy pominąć. Podstawiając wyrażenia (5), (3) i (6) otrzymujemy równanie ruchu:

$$F' = T'_1 - 3mg \sin \alpha = 2ma_1 \quad (15)$$

Wartość siły T'_1 możemy znaleźć z równania ruchu obrotowego walca

$$-I_0 \varepsilon_1 = T'_1 R \quad (16)$$

gdzie: $I_0 = 0,5 mR^2$, $\varepsilon_1 = a_1/R$ opóźnienie kątowe walca

(zwróćmy uwagę, że $a_1 < 0$, $\varepsilon_1 < 0$, $T'_1 < 0$),
stąd

$$T'_1 = -0,5 ma_1$$

Po podstawieniu T'_1 do wzoru (15) znajdujemy

$$a_1 = -6/5 g \sin \alpha$$

Jest to opóźnienie w ruchu postępowym walca, a więc i całego układu. Układ porusza się ku górze ruchem jednostajnie opóźnionym. Ruch ustanie po czasie

$$t_2 = v_1/a_1$$

Po podstawieniu wyrażenia (13) i (17) mamy

$$t_2 = \frac{5}{66} \frac{\omega_0 R}{g \sin \alpha}$$

Droga przebyta w czasie wynosi

$$S_2 = v_1^2 / 2a_1$$

Uwzględniając wzory (13) i (17) otrzymamy

$$s_2 = \frac{5}{1452} \cdot \frac{(\omega_0)^2 \cdot R^2}{g \sin \alpha}$$

Układ zatrzymał się na górze równi, przebywając drogę $s_1 + s_2$ w czasie $t_1 + t_2$. Teraz następuje trzecia faza ruchu, w której układ zsuwa się w dół równi. Różni się ona od drugiej fazy ruchu zmianą znaku siły T_2 . Siła działająca nie jest dana teraz równaniem (14), lecz

$$F'' = T''_1 - T_2 + F_1 + F_2$$

Podstawiając wyrażenia (5) (3) i (6) możemy napisać równanie ruchu

$$F'' = T''_1 - mg \sin \alpha = 2ma_2 \quad (19)$$

Podobnie jak poprzednio, z równania ruchu obrotowego walca znajdujemy

$$T''_1 = -0,5 ma_2$$

A następnie wyznaczamy przyspieszenie, z jakim cały układ porusza się ruchem postępowym w dół równi

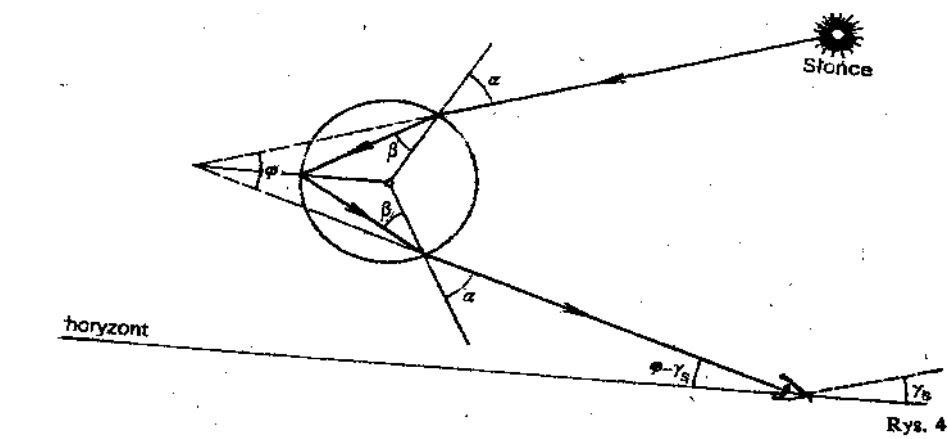
$$a_2 = -2/5 g \sin \alpha$$

Znak „minus” w tym wyrażeniu wynika z przyjętej umowy, że kierunek w górę równi jest dodatni.

Punktacja: 0-5 ptk

C. Tęcza powstaje w wyniku załamania i rozszczepienia promieni świetlnych w kroplach wody znajdujących się w powietrzu. Szczegółowy opis zjawiska tęczy Czytelnik znajdzie w zbiorach zadań olimpijskich.* Tutaj jedynie pokrótce przypomnamy zjawisko powstawania tęczy.

W przypadku tęczy pierwszego rzędu promień świetlny ulega jednokrotnemu wewnętrznemu odbiciu w kropli oraz dwukrotnemu załamaniu, raz przy wejściu, drugi raz przy wyjściu z kropli (rys. 4). Łatwo pokazać, że kąt φ spełnia warunek



$$\varphi = 4\beta - 2\alpha \quad (1)$$

gdzie kąty α i β są kątami padania i załamania światła w kropli cieczy o współczynniku załamania n i spełniają prawo załamania

$$\sin \alpha = n \sin \beta \quad (2)$$

Badamy ekstremum funkcji $\varphi(\alpha)$. Można pokazać, że dla $\varphi' = 0$ spełniony jest warunek

$$\sin^2 \alpha = (4 - n^2)/3 \quad (3)$$

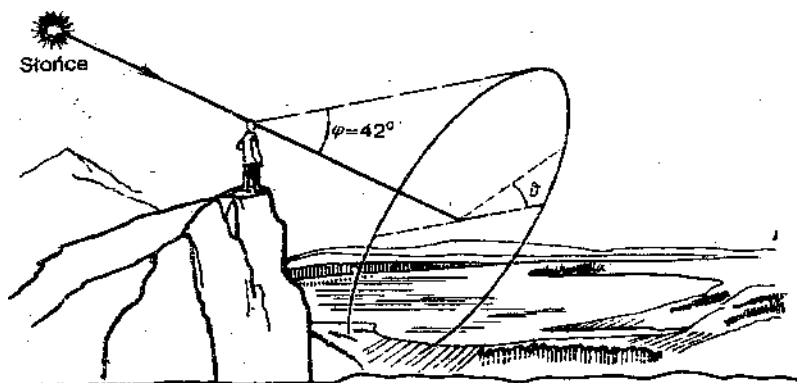
co daje zależność na kąt φ :

$$\varphi = 4 \arcsin \sqrt{\frac{4 - n^2}{3n^2}} - 2 \arcsin \sqrt{\frac{4 - n^2}{3}} \quad (4)$$

Tak, więc dla różnych wartości współczynnika załamania n , a więc dla różnych barw, kąty φ , przy których światło opuszczające kropelkę będzie miało szczególnie duże natężenie, będą różne. Obserwator będzie widział światło danej barwy dochodzące od wszystkich kropelek, które tworzą na sferze niebieskiej łuk okręgu o promieniu kątowym φ . Otrzymamy tęczę. (Dla wody kładąc, $n = 4/3$, otrzymamy $\varphi_{\text{tęczy}} = 42^\circ 2'$).

Obserwator na Ziemi widzi tylko część okręgu tęczy. Aby jakikolwiek fragment tego okręgu był widoczny, kąt $\varphi - \gamma_s$ (który określa wysokość nad horyzontem najwyższego punktu łuku tęczy) musi być dodatni. Wysokość katowa Słońca nad horyzontem γ_s nie może, więc przekraczać promienia katowego tęczy φ . Kiedy Słońce zachodzi (lub wschodzi) $\gamma_s = 0$ i widzimy połówkę tęczy, czyli największy fragment tęczy, jaki możemy zaobserwować z powierzchni Ziemi. Z samolotu bądź z wysokiej góry możemy zobaczyć nawet pełny okrąg tęczy (rys. 5).

Zauważmy, że tęcza powstaje dla ściśle określonego kąta padania a światła na kropelkę wody. Wiadomo, że światło na granicy dwu ośrodków (przy załamaniu i odbiciu) ulega polaryzacji, której stopień zależy od kąta padania. Światło opuszczające każdą kropelkę jest częściowo spolaryzowane, równoległe do płaszczyzny padania.



Rys.5

Płaszczyzna padania promienia wyznaczona przez ten promień i prostopadłą padania dla poszczególnych punktów tęczy jest nachylona pod kątem ϑ do poziomu. Dla lewego i prawego skrajnego brzegu tęczy przeważa składowa spolaryzowana poziomo.

Światło dochodzące z dowolnego punktu tęczy jest mieszaniną światła niespolaryzowanego i spolaryzowanego. Okulary polaryzacyjne wygaszają światło odbite od płaszczyzn poziomych, a więc światło spolaryzowane pionowo. Przy oglądaniu tęczy przez te okulary, ze składowej niespolaryzowanej przechodzi zawsze połowa natężenia światła równa $I_{\min}$, zaś ze składowej spolaryzowanej część zależna od kąta ϑ . W składowej spolaryzowanej drgania zachodzą w kierunku nachylonym pod kątem ϑ do poziomu. Natężenie tej składowej po przejściu przez okulary polaryzacyjne, które przepuszczają światło o tym kierunku polaryzacji, jest proporcjonalne do $\cos^2 \vartheta$ (prawo Malusa).

Zatem

$$I(\vartheta) = I_{\min} + I \cos^2 \vartheta \quad (5)$$

$I(\vartheta)$ osiąga największą wartość $I_{\max}$ dla $\vartheta = 0^\circ$ i $\vartheta = 180^\circ$

$$I_{\max} = I_{\min} + I$$

Wobec tego

$$I = I_{\max} - I_{\min} \quad (6)$$

Tak więc

$$I(\vartheta) = I_{\min} + (I_{\max} - I_{\min}) \cos^2 \vartheta$$

Jest to szukana postać zależności natężenia przepuszczanej przez okulary polaryzacyjne wiązki w funkcji kąta. W uzupełnieniu warto dodać, że na podstawie wzorów Fresnela podających zależności pomiędzy amplitudami wiązek odbitych i załamanych w zależności od kąta padania i załamania można obliczyć stopień polaryzacji światła wychodzącego z tarczy pierwszego rzędu.

Promień światła padający na kroplę pod kątem α , załamuje się pod kątem β . Ulega następnie wewnętrznemu odbiciu, przy czym kąty padania i odbicia są równe β . Promień, wychodząc z kropli, załamuje się, kąt padania w tym przypadku wynosi β , a załamania α (rys. 4).

Na podstawie wzorów Fresnela natężenie wiązek wychodzących z kropli jest proporcjonalne do następujących wyrażeń:
dla wiązki spolaryzowanej równoległe do płaszczyzn padania

$$\left[1 - \frac{\sin^2(\alpha - \beta)}{\sin^2(\alpha + \beta)} \right]^2 \cdot \frac{\sin^2(\alpha - \beta)}{\sin^2(\alpha + \beta)}$$

dla wiązki spolaryzowanej prostopadle do płaszczyzny padania

$$\left[1 - \frac{\operatorname{tg}^2(\alpha - \beta)}{\operatorname{tg}^2(\alpha + \beta)} \right]^2 \cdot \frac{\operatorname{tg}^2(\alpha - \beta)}{\operatorname{tg}^2(\alpha + \beta)}$$

Polaryzację światła ilościowo określa się przez stopień polaryzacji, który jest zdefiniowany jako stosunek różnicy natężeń wiązek spolaryzowanych w płaszczyźnie równoległej i prostopadłej do płaszczyzny padania do sumy natężeń tych wiązek. Na tej podstawie można obliczyć, że światło z tarczy jest spolaryzowane w 96%.

Zainteresowanych Czytelników odsyłamy do podręczników akademickich, które umożliwią zaznajomienie się z wzorami Fresnela i pozwolą na pełniejsze zrozumienie zasygnalizowanych tu zagadnień.

Punktacja: 0-5 ptk

Źródło:
Zadanie pochodzi z „Olimpiady fizyczna”
Autor: A. Nadolny K. Pniewska
WSiP 1986r.