XXII OLIMPIADA FIZYCZNA ETAP I
Zadanie teoretyczne

ZADANIE T3

Nazwa zadania: „Blok wirujący w polu magnetycznym."

Dany jest układ *n* kolejnych współśrodkowych, jednorodnych, sferycznych powłok materialnych, których promienie wynoszą: *r*, 2*r*, 3*r*, ..., *nr*. Wszystkie wykonane są z tego samego materiału i maja tę samą grubość zaniedbywalnie małą w stosunku do *r*. Masa wewnętrznej powłoki wynosi *M*. Oblicz siłę, z jaką układ powłok oddziałuje na masę *m*, w zależności od jej odległości *x* od środka układu. Oblicz natężenie pola grawitacyjnego *y* w punkcie oddalonym o *x* od środka układu. Naszkicuj wykres *y*(*x*) przyjmując *n* = 5. Czy dostrzegasz jakąś prawidłowość?

ROZWIĄZANIE ZADANIA T3

Istotny element rozwiązania tego zadania możemy znaleźć w rozwiązaniu zadania I stopnia wstępnego poprzedniej olimpiady. Udowodniliśmy tam, że powłoka kulista działa na masę znajdującą się na zewnątrz powłoki tak, jakby cała masa powłoki skupiona była w jej środku. Z kolei na punkt znajdujący się wewnątrz powłoki nie dział żadna siła pochodząca od tej powłoki. Pozwala to na natychmiastowe podanie odpowiedzi:

dla $0 \leq x < r$
$$F = 0, \tag{1}$$

dla $r < x < 2r$
$$F = \frac{kMm}{x^2}, \tag{2}$$

dla $2r < x < 3r$
$$F = \frac{kMm}{x^2} + \frac{4kMm}{x^2} = \frac{5kMm}{x^2}, \tag{3}$$

dla $3r < x < 4r$
$$F = \frac{5kMm}{x^2} + \frac{9kMm}{x^2} = \frac{14kMm}{x^2}, \tag{4}$$

czyli ogólnie

dla $nr < x < (n + 1)r$
$$F \frac{kMm}{x^2}\left(1 + 4 + 9 + \ldots + n^2\right),$$

$$y(x) = \frac{kM}{x^2}\left(\sum_{i=1}^{n} i^2\right). \tag{5}$$

Współczynniki 1, 4, 9, ... itd. wyrażają fakt, że powierzchnia *n* – tej powłoki jest n^2 - krotnie większa od powierzchni powłoki najbardziej wewnętrznej – ponieważ grubość powłoki jest stała, więc masa *n* – tej powłoki wynosi n^2M.

Korzystając z wzoru

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

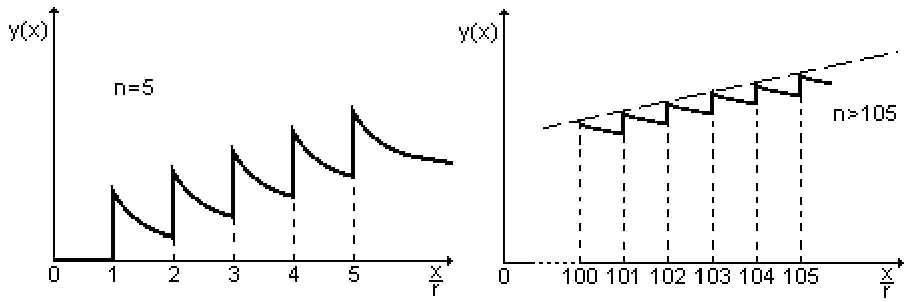
który łatwo udowodnić przez indukcję, i wprowadzając oznaczenie *E*(x) dla części całkowitej liczby *x* (tj. największej z liczb całkowitych mniejszych od liczby *x*), możemy wzór (5) zapisać w postaci

$$y(x) = \frac{kM}{6x^2} E\left(\frac{x}{r}\right) \cdot \left[E\left(\frac{x}{r}\right)+1\right] \cdot \left[2E\left(\frac{x}{r}\right)+1\right].$$

Dla bardzo dużych wartości *n* i *x*, kiedy na masę *m* działa siła wielu powłok, możemy w przybliżeniu zastąpić: $E\left(\frac{x}{r}\right) \approx \frac{x}{r}$, $E\left(\frac{x}{r}\right)+1 \approx \frac{x}{r}$, $2E\left(\frac{x}{r}\right)+1 \approx 2\frac{x}{r}$. Otrzymujemy wtedy

$$y(x) \approx \frac{kM}{3r^3} x .$$

Natężenie pola rośnie więc (pomijając coraz mniej istotne nieciągłości przy przekraczaniu kolejnych powłok) proporcjonalnie do odległości *x*, - a więc tak, jak w przypadku ciągłego rozkładu materii. Szkic wykresu funkcji *y(x)* dla *n* = 5 i dla *n* > 105 pokazano na rysunku 44.



rys. 44

Źródło:
Zadanie pochodzi z „Druk OF"

Komitet Okręgowy Olimpiady Fizycznej w Szczecinie
www.of.szc.pl