XXII OLIMPIADA FIZYCZNA ETAP I
Zadanie teoretyczne

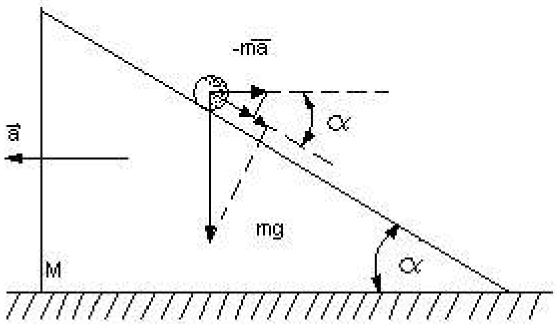
ZADANIE T1

Nazwa zadania: „Śnieżka na stoku"

Na poziomym stole leży klin o masie M. Na płaszczyźnie klina, tworzącej kąt α z płaszczyzną stołu, kładziemy kulkę o masie m. Kulka zaczyna staczać się bez tarcia potoczystego i bez poślizgu. Współczynnik tarcia klina o stół równa się zeru. Oblicz przyspieszenie klina.

ROZWIĄZANIE ZADANIA T1

Wprowadzamy układ odniesienia związany nieruchomo z klinem. Jest to układ nieinercjalny. Prawa Newtona w tym układzie należy zmodyfikować, dodając do sił rzeczywistych tzw. siły bezwładności -ma, gdzie a - przyśpieszenie układu (klina).



Rys.43

Wiadomo, że gdy z sił zewnętrznych na kulkę działa tylko, siła ciężkości o składowej równoległej do równi mgsinα, wtedy kulka, staczając się bez poślizgu, uzyskuje przyspieszenie wzdłuż, równi wynoszące $\frac{5}{7}$gsinα (patrz zadanie III stopnia 1 poprzedniej olimpiady dla przypadku staczania się bez poślizgu). Ponieważ teraz dochodzi dodatkowo równoległa do równi składowa siły bezwładności macosα (patrz rys. 47), więc mamy

$$a' = \frac{5}{7}(g\sin\alpha + a\cos\alpha) \qquad (1)$$

Przyśpieszenie a' skierowane wzdłuż równi możemy rozłożyć na
przyśpieszenie pionowe i poziome (cały czas w układzie nieinercjalnym). Pozioma składowa

$$a'_{poziome} = a' \cos\alpha = \frac{5}{7}(g\sin\alpha + a\cos\alpha)\cos\alpha \qquad (2)$$

Na przyśpieszenie to możemy spojrzeć jako na rezultat działania dwóch sił - siły bezwładności oraz poziomej składowej siły oddziaływania między kulka a równią. Oznaczmy tę ostatnią wielkość symbolem $R_{poziome}$ .Możemy napisać

$$ma + R_{poziome} = m\, a'_{poziome} \tag{3}$$

Co pozwala wyznaczyć $R_{poziome}$

$$R_{poziome} = \frac{5}{7} m(g\sin\alpha + a\cos\alpha)\ \cos\alpha - ma \tag{4}$$

Klin w rozpatrywanym układzie odniesienia spoczywa. Suma sił (rzeczywistych i pozornych). Jakie na niego działają, musi być równa zeru. Na klin działa siła bezwładności (w prawo) i siła przeciwna do siły $R_{poziome}$ (w lewo). Siły te, muszą być równe, co do wartości bezwzględnej

$$Ma = m[\frac{5}{7} g\sin\alpha\cos\alpha + \frac{5}{7} a\cos^2\alpha - a] \tag{5}$$

Równanie (5) pozwala wyznaczyć interesującą nas wartość przyśpieszenia a. Po prostych przekształceniach równania (5) otrzymujemy:

$$a = \frac{\frac{5}{7} mg \sin\alpha \cos\alpha}{M + m\left(1 - \frac{5}{7}\cos^2\alpha\right)} \tag{6}$$

Jest to już w zasadzie koniec rozwiązania. Z ciekawości możemy jeszcze wstawić wyznaczoną wartość przyśpieszenia a do wzoru (I) i w ten sposób otrzymać jawne wyrażenie na przyśpieszenie kulki względem klina (jawne - to znaczy zawierające tylko wielkości dane w treści zadania).

$$a' = \frac{5}{7} g \sin\alpha \frac{1}{1 - \frac{5}{7}\frac{m}{M+m}\cos^2\alpha} \tag{7}$$

Wskutek „uciekania" klina przyśpieszenie to jest , większe od $\frac{5}{7}$ gsinα.

Przekonujemy się, że dla $M \to \infty$, $a' \to \frac{5}{7}$ gsinα , jak być powinno , gdyż bardzo ciężki klin uzyska w ,wyniku oddziaływania z kulką bardzo niewielkie przyspieszenie, a zatem układ z nim związany będzie prawie inercjalny.

Zadanie powyższe można oczywiście rozwiązać wieloma sposobami . Wspomnijmy tu. krótko o dwóch innych.

Najbardziej bezpośrednia metoda polegałaby na wypisaniu praw dynamiki w układzie inercjalnym. Należałoby wtedy ,wprowadzić dwa rodzaje sił reakcji - prostopadły nacisk między kulką i równią oraz styczną siłę tarcia. Ilość równań wyrażających prawa dynamiki równałaby się 4, a mianowicie 1 równanie dla klina, 2 równania dla poziomej i pionowej składowej przyśpieszenia kulki i 1 równanie dla ruchu obrotowego. Do tego należałoby uwzględnić dwa równania więzów jedno wyrażające warunek toczenia bez poślizgu i drugie mówiące, że kulka cały czas dotyka równi. Ostatecznie mielibyśmy układ sześciu równań na 6 niewiadomych - przyśpieszenie klina, dwie składowe przyśpieszenia środka kulki, przyśpieszenie kątowe kulki, prostopadłą siłę reakcji i siłę tarcia. Jak, widać , byłby to sposób rozwiązania bardzo żmudny.

Zadanie to można również rozwiązać korzystając z praw zachowania. Wprowadzając prędkość klina V i prędkość v' kulki względem klina oraz prędkość kątową $\omega = \frac{v'}{R}$ i zakładając, że środek kulki przesunął się

Wzdłuż klina o x od położenia początkowego, możemy napisać jeszcze dwa równania, wiążące te wielkości - jedno wyrażające prawo zachowania energii, drugie wyrażające prawo zachowania poziomej składowej pędu (składowa pozioma sił zewnętrznych - tj. sił ciężkości i reakcji podłoża znika). Po wyeliminowaniu U i ω uzyskamy związek v' z przesunięciem x: Związek ten będzie miał taką postać, jak w ogólnym przypadku ruchu jednostajnie przyśpieszonego. Ze związku tego możemy

Natychmiast wyznaczyć a', a z wspomnianego prawa zachowania składowej poziomej całkowitego pędu możemy obliczyć a. Sposób ten jest znacznie prostszy od sposobu drugiego i porównywalny, jeśli chodzi o ilość obliczeń, z rozwiązaniem przeprowadzonym ,w układzie nieinercjalnym.

Źródło:
Zadanie pochodzi z „Druk OF”

Komitet Okręgowy Olimpiady Fizycznej w Szczecinie
www.of.szc.pl