XXI OLIMPIADA FIZYCZNA ETAP WSTĘPNY
Zadania teoretyczne

ZADANIE T3

Nazwa zadania: „Nie-zakręcona nakrętka”

Na nieruchomej pionowej śrubie o skoku s znajduje się nakrętka o momencie bezwładności I i o masie m. Przyjmujemy, że współczynniki tarcia nakrętki o śrubę równa się zeru. Nakrętka zsuwa się w dół z prędkością początkową równą v_0.Jaką prędkość pionowego ruchu postępowego nakrętki zależy od czasu? Jaki jest to ruch? Przyspieszenie ziemskie wynosi g.

ROZWIĄZANIE ZADANIA T3

Z natury rzeczy dla nakrętki na śrubie istnieje ścisły związek ruchu obrotowego z postępowym. Przy obrocie nakrętki o kąt 2π jej środek przesuwa się o wielkość skoku śruby s. Dla obrotów o mniejszy kąt $\Delta\varphi$ przesunięcie Δx jest proporcjonalnie mniejsze.

$$\frac{\Delta x}{s} = \frac{\Delta\varphi}{2\pi}$$

Dzieląc tę równość przez odstęp czasu Δt, w którym odbywał się ruch, dostajemy

$$\frac{1}{s}\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{1}{2\pi}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

Przechodząc do granicy $\Delta t \to 0$,otrzymujemy związek między pochodnymi $\frac{dx}{dt} = v$ (prędkość liniowa) i $\frac{d\varphi}{dt} = \omega$ (prędkość kątowa):

$$\frac{1}{s}v = \frac{1}{2\pi}\omega$$

Ponieważ z założenia siły tarcia nie odgrywają roli w tym problemie, więc możemy się posłużyć zasadą zachowania energii mechanicznej. Załóżmy, że zakrętka opadła o x. Przyrównując do siebie początkową i końcową energię całkowitą układu mamy

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}I\omega_0^2 + mgx = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 ,$$

gdzie $\omega_0 = \frac{2\pi}{s}v_0$ jest początkową prędkością kątową. Korzystając ze związku między v i ω oraz v_0 i ω_0, możemy powyższe równanie przepisać w postaci

$$v^2 = v_0^2 + \frac{2g}{1 + \frac{4\pi^2 I}{ms^2}}x$$

Rozważmy teraz ciało spadające w fikcyjnym polu grawitacyjnym o przyspieszeniu g' z wysokości x przy prędkości początkowej v_0.Zasada zachowania energii przyjęłaby w tym wypadku postać:

$$v^2 = v_0^2 + 2g'x.$$

Jeśli utożsamimy g' z wyrażeniem $\dfrac{g}{1+\dfrac{4\pi^2 I}{ms^2}}t$, to widzimy, że dostajemy dwa identyczne równania. Ale identyczne równania musza przy identycznym warunku początkowym mieć identyczne rozwiązania. Spadek swobodny ciała jest tak znanym przykładem, że nie musimy go tu rozwiązywać. Mamy oczywiście

$$x = v_0 t + \frac{1}{2} g' t^2, \qquad v = v_0 + g' t.$$

Oznacza to, że środek ciężkości nakrętki spada w dół ze stałym przyśpieszeniem $g' = g\left(1+\dfrac{4\pi^2 I}{ms^2}\right)^{-1}$, a jego prędkość rośnie według wzoru

$$v = v_0 + \frac{g}{1+\dfrac{4\pi^2}{ms^2}}t\ .$$

Źródło:
Zadanie pochodzi z „Druk OF”

Komitet Okregowy Olimpiady Fizycznej w Szczecinie
www.of.szc.pl