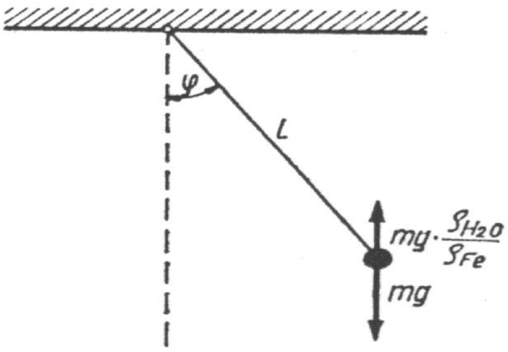
XXI OLIMPIADA FIZYCZNA ETAP I
Zadanie doświadczalne

ZADANIE D1

Zmierz okres drgań stosunkowo masywnego ciała żelaznego o kształcie w miarę opływowym (np. główki młotka), zawieszonego na długiej nici i zanurzonego w wodzie (np. w wannie lub dużej miednicy odpowiednio ustawionej). Zastanów się, czy wykonany pomiar okresu wahań może służyć do wyznaczenia stosunku ciężaru właściwego żelaza do ciężaru właściwego wody.

ROZWIĄZANIE ZADANIA D1

Narzuca się myśl, że obecność siły wyporu powinna zmienić wartość okresu drgań wahadła zanurzonego w cieczy w porównaniu z okresem drgań tego samego wahadła w powietrzu.



Rys. 16

Przyjmijmy więc narazie, że jest to jedyna siła, którą trzeba uwzględnić (obok, oczywiście, siły ciężkośći). Równanie ruchu przyjmie postać

$$ma = mg\left(1 - \frac{\rho_{H_2O}}{\rho_{Fe}}\right)\sin\varphi \tag{1}$$

Równanie ruchu wahadła w powietrzu (czyli praktycznie w próżni) jest

$$ma = mg\sin\varphi \tag{2}$$

Różnica między nimi polega jedynie na tym, że współczynnik g w równaniu (2) zastąpiony został współczynnikiem $g\left(1 - \frac{\rho_{H_2O}}{\rho_{Fe}}\right)$ Tak więc

$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g\left(1 - \frac{\rho_{H_2O}}{\rho_{Fe}}\right)}}, \qquad T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{3}$$

Dzieląc stronami oba powyższe równania i podnosząc do kwadratu dostaniemy:

$$1 - \frac{\rho_{H_2O}}{\rho_{Fe}} = \frac{T^2}{T'^2},$$

co po prostym przekształceniu można zapisać w postaci

$$\rho_{Fe} = \frac{\rho_{H_2O}}{1 - \frac{T^2}{T'^2}}. \tag{4}$$

Pomiar wykonany dla zwykłego młotka zawieszonego na sznurku o długości ponad 1 m dał w wyniku

$$\frac{T^2}{T'^2} = \left(\frac{24}{27}\right)^2 = 0,79,$$

co po podstawieniu do (4) prowadzi do gęstości względnej żelaza

$$\rho_{Fe} = \frac{1}{0,21} = 4,8 .$$

Jest to wynik różniący się znacznie od rzeczywistej wartości gęstości żelaza równej 7,8 – 7,9 (w zależności od obróbki). W tej sytuacji nie warto zajmować się nawet oszacowaniem błędu przypadkowego pomiaru, gdyż jest jasne, że poważny błąd musi tkwić w samej metodzie. Być może zaniedbanie oporu lepkiego wody wprowadziło tak duży błąd? Postarajmy się oszacować wpływ tego czynnika.
Rozważmy w tym celu ruch ciała, na które działają dwie siły – siła proporcjonalna do wychylenia, pod wpływem której ciało wykonywałoby drgania z częstością ω_0, i siła oporu lepkiego proporcjonalna do prędkości. Równanie ruchu tego ciała ma postać:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 x - \alpha \frac{dx}{dt}, \tag{5}$$

gdzie α jest pewną stałą charakteryzującą wielkość oporu. Nie będziemy tu stosowali ogólnej metody rozwiązania takiego równania, która przekracza niewątpliwie możliwości ucznia, ale postaramy się wyciągnąć pewne wnioski odwołując się częściowo do doświadczenia.
Z doświadczenia wiadomo, że równanie takie opisuje drgania tłumione o amplitudzie malejącej w czasie. Zastanówmy się, czy można na postawie bardzo ogólnych argumentów wykazać, jaki musi być charakter tych zmian. Wyobraźmy sobie, że wychyliliśmy punkt materialny do położenia x_1 i puściliśmy go swobodnie. Po wykonaniu pełnego wahnięcia punkt powróci do położenia odległego od środka drgań o jakieś $x_2 < x_1$. Rozpoczyna się nowy cykl ruchu, tym razem z wychyleniem początkowym x_2, który zakończy się w położeniu x_3. Co można powiedzieć o x_3?

Wyobraźmy sobie, że przytrzymaliśmy na chwilę wahadło w położeniu x_2 i zmieniliśmy na świecie układ jednostek, mianowicie skróciliśmy długość wzorca metra w proporcji $\frac{x_2}{x_1}$. Liczba wyrażająca w rzeczywistości mniejszą długość x_2 będzie w nowym systemie miar równa liczbie opisującej długość x_1 w starym systemie miar. W nowym układzie skala czasu pozostaje ta sama – nie zmieni się więc ω_0. Nie zmieni się również współczynnik α mający podobnie jak ω_0 wymiar $\frac{1}{s}$. Nie zmieni się więc i równanie (5). W nowej sytuacji mamy rozwiązać identyczne z przypadkiem poprzednim równanie z identycznym (liczbowo – choć nie fizycznie) wychyleniem początkowym. W wyniku – jako końcowe wychylenie, po wykonaniu pełnego wahnięcia, musimy dostać tę samą co poprzednio liczbę x_2, opisującą odległość x_3 w nowym układzie miar. Odległość ta po powrocie do zwykłego systemu metrycznego wyrazi się liczbą mniejszą od x_2 o czynnik zmiany skali $\frac{x_2}{x_1}$.

Ostatecznie

$$x_3 = x_2 \frac{x_2}{x_1},$$

czyli

$$\frac{x_3}{x_2} = \frac{x_2}{x_1}.$$

Rozumowanie powyższe odnosi się do każdych 3, kolejnych wychyleń – dochodzimy więc do wniosku, że kolejne amplitudy maleć muszą w postępie geometrycznym. Amplitudy te są zarazem wychyleniami w kolejnych czasach rosnących według postępu geometrycznego. Oznaczając *n* – tą amplitudę symbolem A_n, a iloraz postępu literą *q*, można napisać

$$A_n = x(nT) = x_1 q^{-n} = x_1 q^{\frac{-nT}{n}}.$$

Zastępując wyrażenie nT czasem bieżącym t, możemy napisać równanie słuszne jedynie dla czasów t będących wielokrotnością okresu T.

$$x(t) = x_1 q^{\frac{-t}{T}}.$$

Korzystając ze znanego wzoru $a^b = c^{b \ln_c a}$ słusznego dla dowolnego c>0 i wybierając dla wygody $c = e$ (równe podstawie logarytmów naturalnych) możemy napisać

$$q^{\frac{-t}{T}} = e^{\frac{-t}{T}\ln q} = e^{-\lambda t}$$

gdzie λ jest nową stałą zastępującą i tak nie wyznaczoną na razie stałą q.
A co można powiedzieć o wychyleniu pomiędzy chwilami czasu nT i $(n+1)T$? Przyjmiemy dość naturalne założenie, które za chwilę potwierdzimy, że w tych chwilach pośrednich amplitudę $A(t)$ trzeba pomnożyć przez funkcję $\cos\omega t$ opisującą drgania harmoniczne:

$$x(t) = x_1 e^{-\lambda t}\cos\omega t. \qquad (6)$$

Teraz należy wstawić tę postać funkcji do równania (5) i sprawdzić, czy można tak dobrać stałe λ i ω, by równanie to było istotnie spełnione. Pozwoli to nam nie tylko przekonać się o słuszności rozumowania prowadzącego do (6), ale i wyznaczyć nową częstość ω i stała tłumienia λ.
Obliczamy pochodne:

$$\frac{dx}{dt} = -x_1\lambda e^{-\lambda t}\cos\omega t - \omega x_1 e^{-\lambda t}\sin\omega t,$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = x_1\lambda^2 e^{-\lambda t}\cos\omega t + 2x_1\omega\lambda e^{-\lambda t}\sin\omega t - x_1\omega^2 e^{-\lambda t}\cos\omega t$$

I wstawiamy do równania (5). Dostajemy:

$$x_1 e^{-\lambda t}[\lambda^2\cos\omega t - 2\omega\lambda\sin\omega t - \omega^2\cos\omega t] = -\omega_0^2 x_1 e^{-\lambda t}\cos\omega t + \alpha x_1\lambda e^{-\lambda t}\cos\omega t + \alpha\omega x_1 e^{-\lambda t}\sin\omega t.$$

Po podzieleniu obu stron przez $x_1 e^{-\lambda t}$ i uporządkowaniu, dostajemy

$$\left(\lambda^2 - \omega^2 + \omega_0^2 - \alpha\lambda\right)\cos\omega t + \left(2\omega\lambda - \alpha\omega\right)\sin\omega t = 0$$

Równanie to będzie spełnione we wszystkich chwilach czasu wtedy i tylko wtedy, gdy oba nawiasy stojące przy funkcjach $\sin\omega t$ i $\cos\omega t$ będą z osobna równe zeru. Dostajemy:

$$\lambda = \frac{\alpha}{2}$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \lambda^2. \qquad (7)$$

Ostatni wzór świadczy o tym, że uwzględnienie siły oporu prowadzi nie tylko do zmniejszania się z upływem czasu amplitudy, ale i do zmiany częstości drgań ω w porównaniu z wartością ω_0 dla oscylatora nietłumionego.

Wróćmy teraz do naszego młotka. Jakościowa obserwacja wskazuje, że po jednym okresie amplituda zmniejsza się nie więcej niż o 2 – 3 %. Przyjmijmy dla większej pewności nawet 10%. Oznacza to, że

$$e^{-\lambda t} > 0{,}9$$

czyli

$$\lambda t < \ln 10 - \ln 9 \approx 2{,}30 - 2{,}20 = 0{,}1 \tag{8}$$

Równanie (7) możemy przepisać w postaci:

$$\lambda^2 = \omega_0^2 - \omega^2 = 4\pi\left(\frac{1}{T_0^2} - \frac{1}{T^2}\right),$$

Co po pomnożeniu przez T^2 daje

$$\lambda^2 T^2 = 4\pi\left(\frac{T^2}{T_0^2} - 1\right)$$

Korzystając z oszacowania (8) dostajemy

$$\frac{T^2}{T_0^2} - 1 = \frac{(\lambda T)^2}{4\pi^2} < \frac{0{,}01}{4\pi^2} \approx 0{,}00025.$$

Przekonujemy się, że wpływ tłumienia na okres wahań jest w naszym przypadku całkowicie zaniedbywalny. Nie tłumienie jest więc przyczyną poważnej rozbieżności między wartością gęstości żelaza wyznaczoną przez nas a wartością tablicową.

Jest jeszcze jeden czynnik całkowicie przez nas dotychczas zaniedbany. Zauważmy, że kiedy młotek zaczyna przemieszczać się w wodzie, to i woda musi wykonywać ruch, pewna porcja wody musi bowiem zająć wcześniejsze położenie młotka, a inna część wody musi ustąpić „robiąc miejsce” poruszającemu się młotkowi. Gdybyśmy podchodzili do naszego zagadnienia drgań od strony energetycznej obliczając energię kinetyczną i potencjalną całego układu – to musielibyśmy koniecznie uwzględnić energię kinetyczną ruchu wody. Energia potencjalna wody została już przez nas uwzględniona poprzez prawo Archimedesa, co wyraziło się zastąpieniem g przez $g\left(1-\frac{\rho_{H_2O}}{\rho_{Fe}}\right)$ w równaniu ruchu. Energię kinetyczną wody możemy uwzględnić przyjmując, że przy prędkości ciała υ, porusza się nie tylko masa m, ale i pewna „efektywna" masa wody, która powinna być proporcjonalna do objętości zajmowanej przez młotek.

$$E_{kin} = \left[m + \gamma m \frac{\rho_{H_2O}}{\rho_{Fe}}\right]\frac{\upsilon^2}{2} = m\left(1+\gamma\frac{\rho_{H_2O}}{\rho_{Fe}}\right)\frac{\upsilon^2}{2}.$$

Zatem obecność wody nie tylko zmniejsza siłę sprowadzając wahadło do położenia równowagi, co wyraża dodatkowy czynnik $\left(1-\frac{\rho_{H_2O}}{\rho_{Fe}}\right)$ we wzorze (3), ale ponadto zwiększa bezwładność wahadła. Korzystając ze znanej postaci wzoru na okres drgań oscylatora $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$, widzimy, że taki wzrost bezwładności powinien zmodyfikować wzór (3) do postaci

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{l\left(1+\gamma\frac{\rho_{H_2O}}{\rho_{Fe}}\right)}{g\left(1-\frac{\rho_{H_2O}}{\rho_{Fe}}\right)}}.$$

Ponieważ nie dysponujemy żadnym prostym sposobem obliczenia γ, dochodzimy do przekonania, że metodą badań okresu wahań wahadła w wodzie nie można wyznaczyć gęstości materiału, z którego wahadło jest wykonane. Skoro już jednak wykonaliśmy pomiary, a wielkość ρ_{Fe} łatwo znaleźć w tablicach, to możemy posłużyć się tymi wynikami do obliczenia wartości γ, czyli masy wody „unoszonej" wraz z wahadłem. Posługując się danymi, które uzyskał doświadczalnie autor tej książeczki, otrzymuje się

$$\frac{T^2}{T'^2} = \frac{1-\frac{\rho_{H_2O}}{\rho_{Fe}}}{1+\gamma\frac{\rho_{H_2O}}{\rho_{Fe}}},$$

czyli

$$\gamma = \frac{T'^2}{T^2}\left(\frac{\rho_{Fe}}{\rho_{H_2O}} - 1\right) - \frac{\rho_{Fe}}{\rho_{H_2O}} = \left(\frac{27}{28}\right)^2 (7{,}8 - 1) - 7{,}8 \approx 0{,}8,$$

co zgadza się z naszą intuicją. Wartość $\gamma = 1$ oznaczałaby, że masa wody „dołączona" do ruchu młotka równa się po prostu masie wody wypartej przez młotek. Obliczenia teoretyczne dla ciała o kształcie kuli dają wartość $\gamma = 1/2$. Warto dodać, że wartość γ zależy w sposób istotny od kształtu ciała i dla bryły tak nieregularnej – z matematycznego punktu widzenia – jak główka młotka, obliczeń dokonać można jedynie na komputerze, stosując cały złożony aparat matematyczny hydrodynamiki.

Źródło:
Zadanie pochodzi z „Druk OF"

Komitet Okręgowy Olimpiady Fizycznej w Szczecinie
www.of.szc.pl