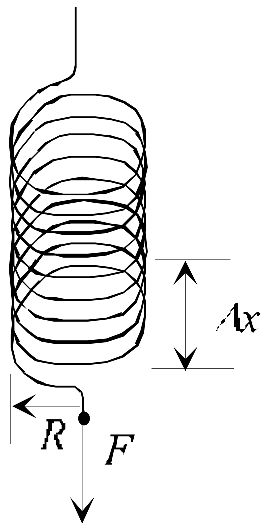
XLVIII OLIMPIADA FIZYCZNA ETAP III
Zadanie doświadczalne

ZADANIE D1

Rozważmy cylindryczną sprężynę o promieniu *R* (rys.), wykonaną z drutu o promieniu *r*. W przypadku gdy ograniczymy się do odkształceń idealnie sprężystych drutu, zachodzi liniowa zależność między siłą rozciągającą *F* a wydłużeniem sprężyny Δx, co można zapisać w postaci:

$$F = \tfrac{1}{4} r^{\alpha} R^{\beta} G^{\gamma} n^{\delta} \Delta x \ ,$$

gdzie α, β, γ, δ - pewne (bezwymiarowe) liczby całkowite, *n* - liczba zwojów sprężyny, *R* - promień sprężyny, *G* - moduł sztywności materiału, z którego wykonany jest drut.



rys.

Masz do dyspozycji drut miedziany o znanej średnicy, linijkę, obciążnik o znanej masie, statyw i kartkę papieru, którą można wykorzystać do nawinięcia sprężyny. Wyznacz wartości stałych α, β, γ, δ oraz moduł sztywności miedzi wyrażony w N/m^2.

Uwagi

1. Zaniedbaj wpływ lakieru, którym pokryty jest drut na jego własności sprężyste.
2. Sprężyna powinna posiadać z co najmniej 10 zwojów.
3. Odległość między zwojami sprężyny powinna być znacznie mniejsza od jej promienia *R*.

ROZWIĄZANIE ZADANIA D1

Część teoretyczna

Współczynników α, β, γ można wyznaczyć korzystając z analizy wymiarowej. Należy w tym celu porównać wymiary po obu stronach równania

$$F = \tfrac{1}{4} r^{\alpha} R^{\beta} G^{\gamma} n^{\delta} \Delta x \,, \tag{1}$$

Biorąc pod uwagę, że liczba zwojów *n* jest wielkością bezwymiarową, [*r*] = [*R*] = [Δ*x*] = (m), [*G*] = (N/m^2) dostajemy związek:

$$\mathrm{N}^1 = (\mathrm{m})^{\alpha} (\mathrm{m})^{\beta} (\mathrm{N/m^2})^{\gamma} (\mathrm{m})^1. \tag{2}$$

Przyrównując wykładniki stojące przy metrach i niutonach otrzymujemy

$$\begin{cases} \gamma = 1 \\ \alpha + \beta - 2\gamma + 1 = 0 \,, \end{cases} \tag{3}$$

skąd po przekształceniu mamy

$$\begin{cases} \gamma = 1 \\ \alpha = 1 - \beta \,. \end{cases} \tag{4}$$

Ponieważ analiza wymiarowa nie daje informacji o wykładniku δ, należy go wyznaczyć inaczej. Można rozumować w następujący sposób. Zgodnie, ze wzorem (1) sprężyna rozciągana siłą *F* wydłuży się Δx. W przypadku, gdy połączymy dwie takie sprężyny, jedna za drugą, to wydłużenie spowodowane siłą *F* wyniesie $2\Delta x$. Taki układ możemy traktować jak sprężynę o 2*n* zwojach:

$$F = \tfrac{1}{4} r^{\alpha} R^{\beta} G^{\gamma} (2N)^{\delta} (2\Delta x) \,, \tag{5}$$

skąd po skorzystaniu z wyrażenia (1) dostajemy (dla $N \neq 0$):

$$1 = (2)^{\delta} 2 \,, \tag{6}$$

skąd $\delta = -1$. Do tego samego wniosku można dojść rozważając połączenie „równoległe" dwóch identycznych sprężyn. Wtedy wydłużenie obu sprężyn będzie również identyczne, natomiast siła rozciągająca rozdziela się po połowie na każdą ze sprężyn.

Stałą δ można wyznaczyć również doświadczalnie badając zależność wydłużenia sprężyny od liczby jej zwojów *n*. W tym celu na sprężynie zawieszać można obciążnik o masie *m.* Przekształcając wzór (1) mamy:

$$n^{-\delta} = \frac{r^{\alpha} G R^{\beta}}{4mg} \Delta x \,, \tag{7}$$

co można zapisać w postaci:

$$\log n = -\frac{1}{\delta} \log \Delta x - \frac{1}{\delta} \log\left(\frac{r^{\alpha} G R^{\beta}}{4mg} \right) \,. \tag{8}$$

Tak więc wartość wykładnika δ jest określona przez nachylenie prostej opisanej równaniem (8).

W podobny sposób możemy wyznaczyć wartość współczynnika β. Ponieważ w zestawie doświadczalnym dostępny jest tylko jeden rodzaj drutu, to narzucającym się pomysłem jest badanie wydłużenia sprężyn o różnych promieniach *R*, wywołanego zawieszeniem obciążnika o masie *m*. Z przekształcenia równania (1) mamy:

$$R^{-\beta} = \frac{r^{\alpha} G}{4mg} \frac{\Delta x}{n} \,, \tag{9}$$

co można zapisać w postaci

$$\log R = -\frac{1}{\beta}\log(\frac{\Delta x}{n}) - \frac{1}{\beta}\log\left(\frac{r^{\alpha}G}{4mg}\right) = A\log(\frac{\Delta x}{n}) + B, \qquad (10)$$

gdzie $A = -\frac{1}{\beta}$, $B = -\frac{1}{\beta}\log\left(\frac{r^{\alpha}G}{4mg}\right)$.

Tak więc stała β jest określona przez współczynnik nachylenia prostej opisanej równaniem (10). Znając β możemy wyznaczyć stałą $\alpha = 1-\beta$. Określenie parametru *B* prostej opisanej równaniem (10) pozwala wyznaczyć wartość modułu sztywności

$$G = \frac{4mg}{r^{\alpha}}10^{-\beta B} \qquad (11)$$

Część doświadczalna

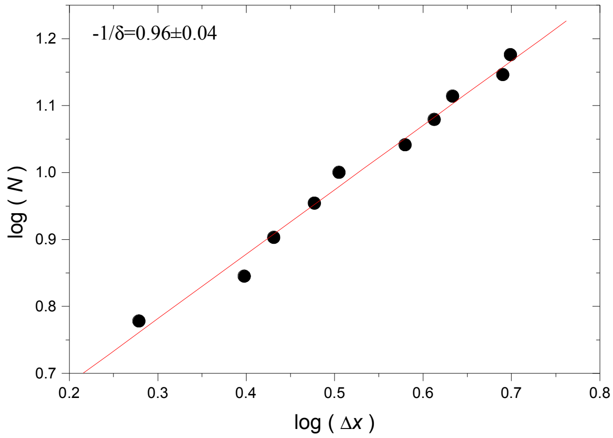
Podstawową trudnością w rozwiązaniu jest umiejętność „nawinięcia” z dostępnego drutu sprężyny. Sprężyny o różnych promieniach *R*, można nawijać przy użyciu papieru kancelaryjnego zwiniętego w rulon. Należy zadbać o to aby zwoje sprężyny układały się możliwie blisko siebie. W celu wykonania pomiarów wydłużenia sprężyny konieczne jest zawieszanie sprężyny na statywie oraz ciężarka na sprężynie. Z tego powodu początkowa i końcowa część sprężyny musi być zdeformowana. Dlatego ważne jest aby nie badać wydłużenia całej sprężyny, a jedynie jej środkowy („równo nawinięty”) fragment, w którym promienie poszczególnych zwojów można uznać za identyczne. Zwykle pierwsze zawieszenie obciążnika wywołuje inną wartość wydłużenia niż każde następne. Wiąże się to z odkształceniami plastycznymi drutu powstającymi podczas nawijania sprężyny. Dlatego pomiary wydłużenia dla danej sprężyny należy kilkakrotnie powtórzyć, sprawdzając, czy po zdjęciu obciążnika sprężyna wraca do stanu wyjściowego. Pomiar promienia *R* należy wykonać po wykonaniu pomiarów jej wydłużenia *R* (po zdjęciu sprężyny z papierowego rulonu jej promień zwiększa się i nieznacznie maleje po pierwszym zawieszeniu na niej obciążnika)

W przypadku gdy decydujemy się na wyznaczenie stałej δ doświadczalnie, należy nawinąć sprężynę o kilkunastu (*n*) zwojach, a następnie wykonywać pomiary wydłużenia, skracając ją o kolejne zwoje. Przykładowe wyniki dla sprężyny o promieniu *R* = (16 1 1) mm umieszczone zostały w Tabeli 1.

Tabela 1

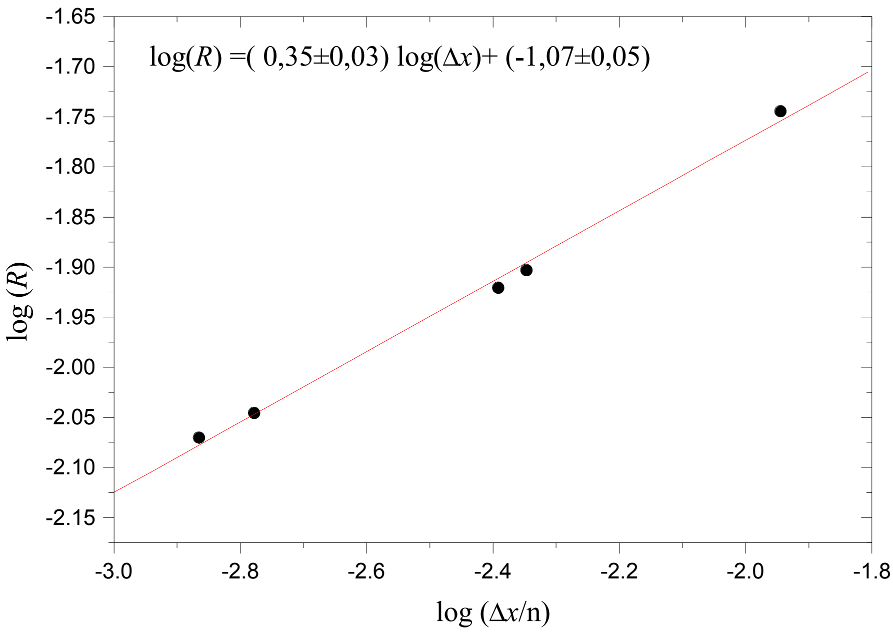
N	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
6h [cm] 1 0.2 cm	1.9	2.5	2.7	3.0	3.2	3.8	4.1	4.3	4.9	5.0

Wykres zależności log (*n*) od log(Δ*x*) przedstawiono na rys. 1.



Z dopasowania prostej otrzymano δ= (-1,04±0,05). Ponieważ nasze rozwiązanie ograniczamy do wartości całkowitych to przyjmujemy, że δ= - 1.

W celu wyznaczenia zależności wydłużenia Δx od promienia *R* badano sprężyny o *N* = 15 zwojach. Wyniki eksperymentalne przedstawiono na rys. 2.



rys. 2

Z dopasowania prostej otrzymano β =(–3,0±0,1). W efekcie więc α = 4, β = –3, γ = 1, δ = –1, a więc wzór (1) przyjmie postać:

$$F = \frac{r^4 G}{4R^3 N}\Delta x\,.$$

Po podstawieniu wartości liczbowych do wzoru (11) dostajemy $G = (5{,}7 \pm 1{,}5) \cdot 10^{10}$ N/m^2.

Bardzo znaczący wpływ na wynik pomiaru ma staranne wykonanie sprężyny. Należy zadbać też o to aby zwoje sprężyny były „równe” i aby odległość między nimi była znacznie mniejsza od promienia sprężyny R. Duży błąd wyznaczenia G związany jest przede wszystkim z niedokładnością wyznaczenia średnicy drutu (zależność potęgowa). Znaczący wpływ na uzyskany wynik ma też dokładność pomiaru wydłużenia sprężyny.

Punktacja

1. Wyznaczenie γ oraz związku między α i β — do 4 pkt.
2. Wyznaczenie stałej δ (rozważania teoretyczne lub na podstawie badania doświadczalnego sprężyny ze zmienną liczbą zwojów) — do 3 pkt.
3. Pomysł badania sprężyn o różnych promieniach prowadzący do wyznaczenia stałych β oraz α — do 3 pkt.
4. Wykonanie pomiarów wydłużenia sprężyn o różnych promieniach — do 5 pkt.
5. Sporządzenie poprawnego wykresu i dopasowanie prostej — do 3 pkt.
6. Wyznaczenie wartości stałych α, β oraz modułu sztywności miedzi G wraz z analizą błędów pomiarowych — do 2 pkt.

Źródło:

Komitet Okręgowy Olimpiady Fizycznej w Szczecinie
www.of.szc.pl