XLV OLIMPIADA FIZYCZNA ETAP I
Zadania teoretyczne

ZADANIE T3

Nazwa zadania: „Strzelające działo na szczycie góry”

Na szerokości geograficznej północnej $\phi_o = 30^0$ na szczycie góry ustawiono działo. Lufa działa została skierowana poziomo dokładnie wzdłuż południka, w kierunku północnego bieguna geograficznego Ziemi. Z działa wystrzelono pocisk wprowadzając go na orbitę kołową wokół Ziemi. Przyjmując, że okres obrotu Ziemi wokół własnej osi wynosi *T* = 24 h, promień Ziemi jest równy *R* = 6400 km oraz przyspieszenie grawitacyjne ma wartość *g* = 9,8 m/s^2. Oblicz maksymalną szerokość geograficzną , jaką osiągnie wystrzelony pocisk. Przyjmij, że Ziemia jest w przybliżeniu jednorodną kulą i zaniedbaj opory ruchu pocisku.

ROZWIĄZANIE ZADANIA T3

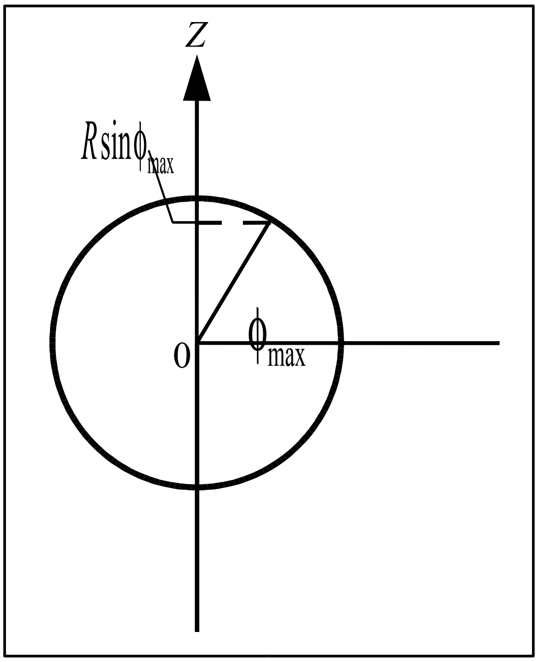
W układzie inercjalnym związanym ze środkiem Ziemi prędkość liniowa pocisku poruszającego się po orbicie kołowej o promieniu R (w rzeczywistości nieco większym od promienia Ziemi) wynosi

$$V = [Rg]^{1/2}. \qquad (1)$$

W chwili wystrzału prędkość *v* składa się z dwóch wzajemnie prostopadłych składowych stycznych do powierzchni Ziemi składowej V_1 związanej z obrotem Ziemi z częstością kołową $\Omega = 2\pi / T$,

$$V_1 = R\Omega \cos \Phi_0 \qquad (2)$$

oraz składowej V_p nadanej przez działo w kierunku bieguna (ryc.3),

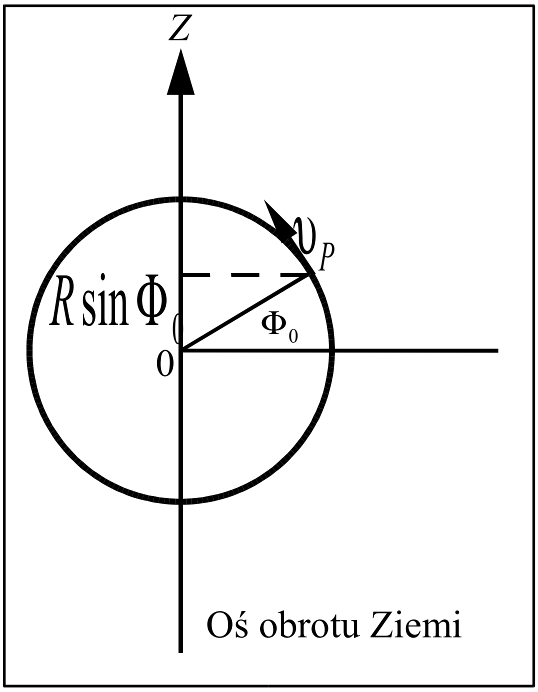


Ryc.3

$$V_p = \left[V^2 - V_1^2\right]^{1/2} = \left[Rg - R^2\Omega^2 \cos^2 \Phi_0\right]^{1/2}. \qquad (3)$$

Wystrzelony pocisk będzie zataczał koło wielkie w płaszczyźnie przecinającej kulę Ziemską pod kątem $\Phi_{\max}$ określającym maksymalną szerokość geograficzną osiąganą przez pocisk. Ponieważ ruch pocisku po okręgu jest jednostajny, to rzut prostopadły punktu położenia pocisku na płaszczyznę rysunku (ryc.4) wykonuje ruch harmoniczny o częstości kołowej

$$\omega = V / R = \left[g / R\right]^{1/2}. \qquad (4)$$



Ryc.4

Współrzędna *z* (oś *Z* jest skierowana wzdłuż osi obrotu Ziemi) punktu położenia pocisku zależy więc od czasu *t* jak

$$z = R\sin\Phi_{\max}\sin(\omega t + \delta). \tag{5}$$

Współrzędna prędkości $V_z = dz/dt$ jest w chwili *t* równa

$$V_z = R\omega\sin\Phi_{\max}\cos(\omega t + \delta). \tag{6}$$

Tuż po wystrzale w chwili t_0, gdy pocisk znajdował się na szerokości geograficznej Φ_0, współrzędne z i V_z wynosiły odpowiednio (ryc.3)

$$z = R\sin\Phi_0, \tag{7}$$

$$V_z = V_p\cos\Phi_0. \tag{8}$$

Przyrównując (5(do (7) i (6) do (8) dostajemy dla chwili t_0 równania:

$$\sin\Phi_{\max}\sin(\omega t_0 + \delta) = \sin\Phi_0, \tag{9}$$
$$R\omega\sin\Phi_{\max}\cos(\omega t_0 + \delta) = V_p\cos\Phi_0. \tag{10}$$

Korzystając z tożsamości $\sin^2(\omega t_0 + \delta) + \cos^2(\omega t_0 + \delta) = 1$ oraz z równań (3) i (4) otrzymujemy

$$\sin\Phi_{\max} = \left[1-\left(R\Omega^2/g\right)\cos^4\Phi_0\right]^{1/2} = 0{,}999028,$$

gdzie podstawiliśmy $\Omega=2\pi/T$. Maksymalna szerokość geograficzna osiągana przez pocisk wynosi więc

$$\Phi_{\max} = 87{,}5.$$

Źródło:
Zadanie pochodzi z czasopisma „Fizyka w Szkole” maj-czerwiec 96r.