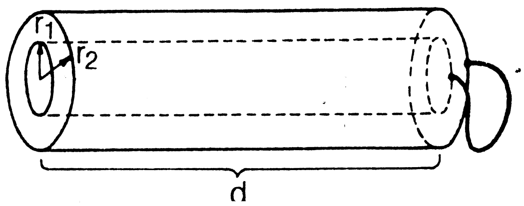
XLV OLIMPIADA FIZYCZNA ETAP II
Zadanie teoretyczne

ZADANIE T3

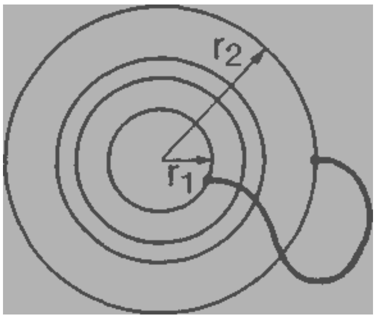
Nazwa zadania: „Kondensator"

Kondensator cylindryczny (próżniowy) o długości d składa się z dwóch współosiowych cylindrów o promieniach r_1 i r_2. Ryc. 3. Okładki tego kondensatora są połączone przewodem, a ładunki na każdej z nich są początkowo równe zero. Drugi cylindryczny kondensator o takiej samej długości podłączono do baterii i naładowano



Ryc. 3

do napięcia U. Po odłączeniu wsunięto go współosiowo między okładki drugiego kondensatora jak na rycinie 4. Oblicz ładunek jaki przepłynął przewodem łączącym



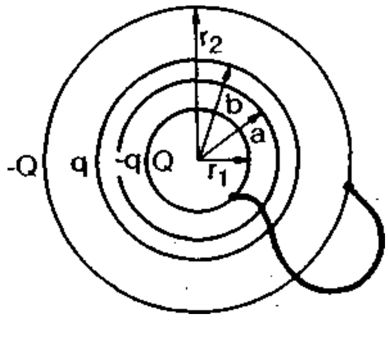
Ryc.4

okładki pierwszego kondensatora. Zaniedbaj ładunek na tym przewodzie oraz zaburzenie pola na końcach cylindrów.

Uwaga: $\int (1/x)dx = \ln x + C$, gdzie $\ln$ oznacza logarytm przy podstawie $e = 2{,}718...$.

ROZWIĄZANIE ZADANIA T3

Przyjmijmy promienie cylindrów drugiego kondensatora równe a i b $(a<b)$ oraz załóżmy, że ładunek na jego zewnętrznej okładce po naładowaniu wynosił q, a na wewnętrznej $-q$. Po odłączeniu od baterii ładunki te pozostają nie zmienione. Przyjmijmy, że po wsunięciu tego kondensatora na okładkach pierwszego wyindukują się ładunki Q i $-Q$, ryc. 5.



Ryc. 5

Ze względu na symetrię osiową układu pole elektryczne między okładkami kondensatorów jest skierowane radialnie. Rozważając współosiową powierzchnię cylindryczną o promieniu r otrzymujemy z prawa Gaussa:

$$\varepsilon_0 E_r 2\pi r d = Q$$

czyli

$$E_r = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 d}\frac{1}{r} \quad \text{gdy} \quad r_1 < r < a,$$

$$\varepsilon_0 E_r 2\pi r d = Q - q$$

czyli

$$E_r = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 d}\frac{1}{r} \quad \text{gdy} \quad b < r < r_2,$$

gdzie ε_0 oznacza przenikalność elektryczną próżni. Różnice potencjałów pomiędzy kolejnymi cylindrami są równe

$$V_{r_1 a} = \int_{r_1}^{a} E_r dr = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 d}\ln\frac{a}{r_1},$$

$$V_{ab} = \int_{a}^{b} E_r dr = \frac{Q-q}{2\pi\varepsilon_0 d}\ln\frac{b}{a},$$

$$V_{br_2} = \int_{b}^{r_2} E_r dr = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 d}\ln\frac{r_2}{b_1}.$$

Ponieważ różnica potencjałów między zawartymi okładkami pierwszego kondensatora jest równa zero, to

$$V_{r_1 a} + V_{ab} + V_{b r_2} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 d}\left[Q\ln\frac{a}{r_1} + (Q-q)\ln\frac{b}{a} + Q\ln\frac{r_2}{b}\right] = 0\,,$$

skąd

$$Q = q\frac{\ln(b/a)}{\ln(a/r_1) + \ln(b/a) + \ln(r_2/b)} = q\frac{\ln(b/a)}{\ln(r_2/r_1)}\,.$$

Dla którego kondensatora przed między okładki pierwszego mamy, zgodnie z prawem Gaussa, $E_r' = -q(2\pi\varepsilon_0 d)/r$, czyli

$$U = \left|\int_a^b E_r' dr\right| = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 d}\ln\frac{b}{a}\,,$$

gdzie przyjęliśmy $q > 0$ oraz $U > 0$. Ostatecznie otrzymujemy

$$Q = U\frac{2\pi\varepsilon_0 d}{\ln r_2/r_1}\,.$$

Punktacja

Poprawne skorzystanie z prawa Gaussa	3 pkt.
Związek między różnicą potencjałów okładek, a ładunkiem na okładkach kondensatora cylindrycznego	2 pkt.
Obliczenie wartości potencjałów na okładkach w przypadku, gdy drugi kondensator jest wsunięty między okładki pierwszego	3 pkt.
Obliczenie ładunku Q	2 pkt.

Źródło:
Zadanie pochodzi z „Druk z OF”

Komitet Okręgowy Olimpiady Fizycznej w Szczecinie
www.of.szc.pl