XLV OLIMPIADA FIZYCZNA ETAP III
Zadanie teoretyczne

ZADANIE T1

Nazwa zadania: „Latający pocisk”

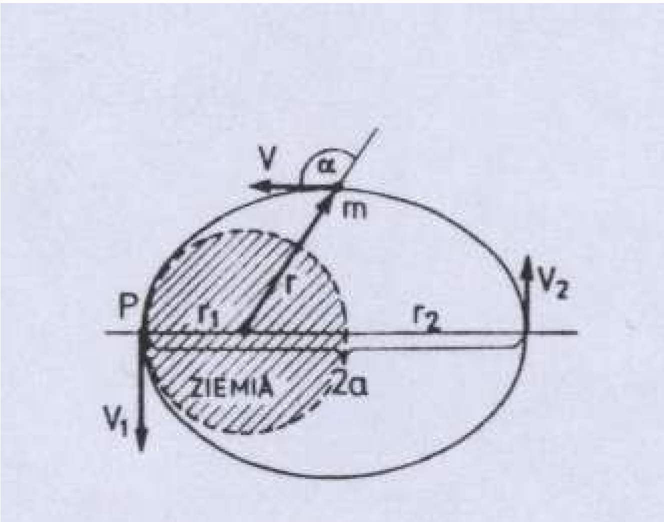
W punkcie **P**, na powierzchni Ziemi, na szerokości geograficznej **φ=60°** znajduje się działo. Lufa działa jest ustawiona poziomo i skierowana na wschód. Pociski wystrzeliwane z tego działa mogą poruszać się po różnych orbitach wokółziemskich.

1. Jaki jest najkrótszy czas τ , po którym może nastąpić spotkanie wystrzelonego pocisku z punktem P?
2. Oblicz najmniejszą prędkość wystrzelonego pocisku względem P, dla której nastąpi jego spotkanie z punktem P po czasie τ .

Nie uwzględniaj istnienia atmosfery oraz przyjmij, ze środek Ziemi spoczywa w układzie inercjalnym.

Należy przyjąć następujące dane:

- Stała grawitacyjna $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \; N \cdot m^2/kg^2$
- Masa Ziemi $M = 5{,}98 \cdot 10^{24} \; kg$
- Promień Ziemi $R = 6{,}36 \cdot 10^{6} \; m$
- Okres obrotu Ziemi wokół osi $T = 8{,}62 \cdot 10^{4} \; s$



Ryc. 1

ROZWIĄZANIE ZADANIA T1

1. Pocisk krążący po orbicie eliptycznej tuż przy powierzchni Ziemi wykonuje kilkanaście okrążeń w ciągu doby. Im większy jest rozmiar elipsy, tym dłuższy jest okres obiegu pocisku(III prawo Keplera). Można zatem tak dobrać

prędkość początkową pocisku V_1, by całkowita wielokrotność obiegu była równa T. Najkrótszy czas τ jest wiec równy T.

2. Związek między prędkością pocisku V w układzie inercjalnym związanym ze środkiem Ziemi a prędkością pocisku v względem punktu P w chwili wystrzału jest następujący (ω = 2π / T):

$V = v + R\omega\cos\varphi$. (1)

Dla orbity kołowej o promieniu R z centrum w środku Ziemi mamy

$GMm / R^2 = mV_0^2 / R$ (2)

skąd otrzymujemy okres obiegu pocisku

$T_0 = 2\pi R / V_0 = 2\pi (R^3 / GM)^{1/2}$. (3)

Z III prawa Keplera dostajemy zależność:

$T_1^2 = \left(a^3 / R^3\right) T_0^2 = 4\pi^2 a^3 / GM$, (4)

gdzie T_1 jest okresem obiegu pocisku po elipsie, której półoś wielka wynosi a. Korzystając teraz ze związku między a i całkowitą energią pocisku E

$a = -GMm/2E$ (5)

gdzie *E* jest wielkością stałą i w związku z tym możemy ją obliczyć np. dla chwili początkowej

$E = mV_1^2/2 - GMm/R$, (6)

dostajemy

$a = \left(2/R - V_1^2/GM\right)^{-1}$. (7)

Po podstawieniu (7) do wzoru (4) otrzymujemy

$T_1^2 = (4\pi/GM)\left(2/R - V_1^2/GM\right)^{-3}$ (8)

Ponieważ warunkiem spotkania pocisku z punktem P powierzchni Ziemi jest równość

$nT_1 = T$ (n – liczba naturalna) (9)

to

$$V_1^2 = GM\left(\frac{2}{R} - \sqrt[3]{\frac{4\pi^2 n^2}{GMT^2}}\right). \quad (10)$$

Warunkiem koniecznym obiegu pocisku po elipsie o półosi $a \geq R$ jest

$V_1 \geq V_0 = (GM/R)^{1/2}$, (11)

zatem musi być spełniona nierówność

$$\frac{1}{R} \geq \sqrt[3]{\frac{4\pi^2 n^2}{GMT^2}} = \left(\frac{nT_0}{T}\right)^{2/3}\frac{1}{R} \quad (12)$$

czyli

$n \leq T/T_0$. (13)

Stosunek T/T_0 ma wartość równą 17,07. Największą liczbą n spełniającą nierówność (13) jest więc liczba n=17. liczbie n=17 odpowiada więc najmniejsza prędkość V_1 określona przez równanie (10). Kładąc n=17 we wzorze (10) obliczamy V_1:

$V_1 = 7{,}93\ \ km/s$.

Prędkość V_1 jest tylko nieco większa od pierwszej prędkości kosmicznej. Następnie, korzystając z (1), obliczamy najmniejszą prędkość pocisku wystrzelonego względem punktu P:

$v = V_1 - R\omega\cos\varphi = 7{,}7\ \ km/s$.

Źródło:
Zadanie pochodzi z „Druk OF”

Komitet Okręgowy Olimpiady Fizycznej w Szczecinie
www.of.szc.pl