XLIV OLIMPIADA FIZYCZNA ETAP II
Zadania teoretyczne

ZADANIE T2

Na cząstkę o masie m i ładunku q poruszającą się w stałym, jednorodnym polu magnetycznym o indukcji **B** działa siła hamująca, proporcjonalna do prędkości **v** cząstki i przeciwnie do niej skierowana, **F** = - γ **v**. W chwili początkowej cząstka miała prędkość **u** prostopadłą do wektora indukcji **B**. Oblicz odległość między położeniem, w którym cząstka zatrzyma się po nieskończenie długim czasie, a położeniem w którym znajdowała się w chwili początkowej.

Dane: m, q, B = $|B|$, γ , u = $|u|$.

ROZWIĄZANIE ZADANIA T2

Przyjmijmy, że w chwili początkowej cząstka znajdowała się w początku układu współrzędnych, w punkcie (0,0,0) oraz że **B** = (0,0,B) i **u** = (u,0,0). Równania ruchu cząstki mają postać

$$m(dv_x/dt) = -\gamma v_x + qBv_y, \qquad (1)$$
$$m(dv_y/dt) = -\gamma v_y - qBv_x,$$

gdzie $v_x = dx/dt$ oznacza x – ową, a $v_y = dy/dt$ y – kowa współrzędną prędkością cząstki. Ruch cząstki odbywa się w płaszczyźnie z = 0. Układ równań (1) możemy zapisać w postaci

$$(m/dt)(mv_x + \gamma x - qBy) = 0, \qquad (2)$$
$$(m/dt)(mv_y + \gamma y + qBx) = 0,$$

gdzie x, y, v_x, v_{yx} są funkcjami czasu t. Skorzystamy teraz z tego, że jeżeli pochodna funkcji jest równa zero, to funkcja pierwotna ma stałą wartość. Zatem

$$mv_x + \gamma x - qBy = C_1, \qquad (3)$$
$$mv_y + \gamma y + qBx = C_2,$$

gdzie C_1 C_2 są pewnymi stałymi, które można wyznaczyć z warunków początków ruchu. A mianowicie: kładąc w równaniach (2) x(0) = 0 i y(0) = 0 oraz $v_x(0)$ = u i v_y (0) = 0 dla t = 0 otrzymujemy $C_1 = mu$, $C_2 = 0$, czyli

$$m[v_x(t) - u] = -\gamma x(t) + qBy(t), \qquad (4)$$
$$mv_y(t) = -\gamma y(t) - qBx(t),$$

W dalszym ciągu rozwiązywania problemu wystarczy w zasadzie już tylko jakościowa dyskusja układu równań (4). Wiemy, że prędkość cząstki oddziałującej z polem magnetycznym nie ulega zmianie. Jednak tutaj mamy do czynienia również z siłą hamującą (γ > 0), która powoduje zatrzymanie cząstki praktycznie po odpowiednio długim, lecz skończonym czasie (w zależności od rzeczywistych warunków, w jakich odbywa się ruch cząstki; rozważane prędkości mniejszych od pewnej wielkości traci

sens). Mamy więc $v_x \to 0$ i $v_y \to 0$ dla $t \to \infty$. Oznaczmy przez x_∞ i y_∞ współrzędne położenia punktu, do którego zmierza cząstka, tzn. $x \to x_\infty$ i $y \to y_\infty$ dla $t \to \infty$. Zgodnie z (4) mamy dla $t \to \infty$ następujący układ równań:

$$mu = \gamma x_\infty - qB y_\infty, \quad (5)$$
$$0 = \gamma y_\infty + qB x_\infty.$$

Rozwiązaniem układu (5) są współrzędne:

$$x_\infty = \frac{\gamma}{\gamma^2 + (qB)^2} mu \quad \text{oraz} \quad y_\infty = \frac{qB}{y^2 + (qB)^2} mu$$

zatem szukana odległość wynosi

$$d = (x_\infty^2 + y_\infty^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{m|u|}{[\gamma^2 + (qB)^2]^{\frac{1}{2}}}.$$

Źródło:
Zadanie pochodzi z czasopisma „Fizyka w Szkole”

Komitet Główny Olimpiady Fizycznej w Szczecinie
www.of.szc.pl