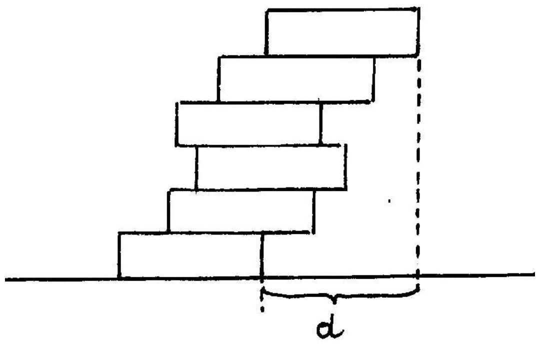
XLII OLIMPIADA FIZYCZNA ETAP I
Zadanie teoretyczne

ZADANIE T2

Nazwa zadania: „Co z tą cegłą?"

Mamy do dyspozycji nieograniczoną liczbę jednakowych, jednorodnych cegieł, które układamy jedna na drugiej, ryc. 7.

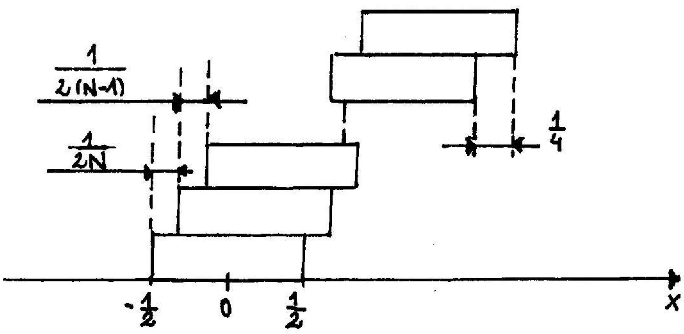


Ryc.7

Czy wartość przesunięcia *d* między najniższą a najwyższą cegłą, przy której układ cegieł pozostaje w równowadze trwałej, może być dowolnie duża?

ROZWIĄZANIE ZADANIA T2

Wartość przesunięcia *d* może być dowolnie duża. Rozpatrzmy następujące ułożenie dowolnie dużej, skończonej liczby *N* cegieł: pierwszą kładziemy na podłożu, drugą kładziemy na pierwszej tak by była przesunięta względem niej o $\frac{1}{2N}$ (długość cegły przyjmujemy równą 1), trzecią przesuniętą względem drugiej o $\frac{1}{2(N-1)}$ itd. aż do ostatniej N-tej, która jest przesunięta względem $(N-1)$-szej o $\frac{1}{4}$ długości cegły (ryc. 8).



Ryc.8

Wprowadźmy układ odniesienia, którego początek pokrywa się z rzutem środka masy pierwszej cegły.
Współrzędna *x* środka masy $(N-1)$ cegieł ułożonych w podany sposób na pierwszej cegle jest określona wzorem

$$x_s = (N-1)^{-1}\left[\frac{1}{2N} + \left(\frac{1}{2N} + \frac{1}{2(N-1)}\right) + \left(\frac{1}{2N} + \frac{1}{2(N-1)} + \ldots \frac{1}{4}\right)\right] = (N-1)^{-1}\left[\frac{N-1}{2N} + \frac{N-2}{2(N-1)} + \frac{1}{4}\right] < (N-1) \bullet \frac{N-1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Spełniona jest więc nierówność $\frac{1}{2} < x_s < \frac{1}{2}$ oznacza, że środek masy $(N-1)$ cegieł (ułożonych na pierwszej) leży dokładnie ponad pierwszą cegłą (jego rzut leży wewnątrz konturu pierwszej cegły). Identycznie dowodzimy, że środek masy $(N-2)$ cegieł ułożonych na drugiej leży dokładnie ponad drugą cegłą, środek masy $(N-3)$ cegieł ułożonych na trzeciej — dokładnie ponad trzecią itd. Stwierdzamy zatem, że cegły ułożone w podany sposób będą pozostawały w równowadze trwałej. Wobec tego, że ciąg odległości d_N wyznaczających przesunięcie ostatniej z N-cegieł względem pierwszej,

$$d_N = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots \frac{1}{N}\right)$$

dąży do nieskończoności, gdy $N \to \infty$ (szereg harmoniczny), wartość przesunięcia *d* może być dowolnie duża.

Punktacja:
Propozycja stabilnego ułożenia cegieł
o nieograniczonej wartości przesunięcia *d* do 5 p- któw.
Dowód stabilności zaproponowanego ułożenia do 5 p- któw.

Źródło:
Zadanie pochodzi z „Druk OF”

Komitet Okręgowy Olimpiady Fizycznej w Szczecinie
www.of.szc.pl