XLII OLIMPIADA FIZYCZNA ETAP II
Zadanie teoretyczne

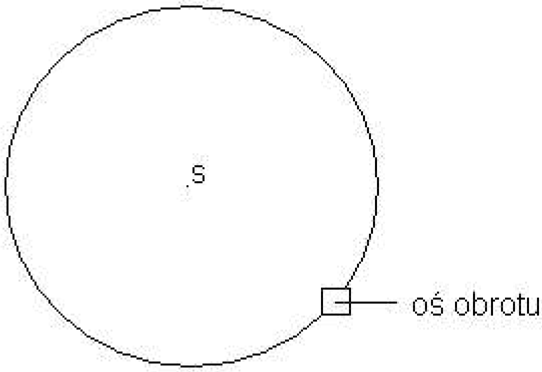
ZADANIE T3

Nazwa zadania: „Promieniowanie ciała doskonale czarnego”

Przestrzeni kosmicznej w dużej odległości od Słońca, znajduje się ciało doskonale czarne i doskonale przewodzące ciepło. Ciało to, w kształcie sześcianu o krawędzi a = 10 cm, krąży wokół Słońca po orbicie kołowej. Gdyby ciało to miało kształt kuli, jego temperatura równowagowa byłaby równa T_o = 300 K.

1) Jaka może być największa i najmniejsza temperatura równowagowa tego ciała?

2) Jaka jest średnia moc promieniowania ciała, jeżeli obraca się ono jednostajnie wokół osi zaznaczonej, na ryc. 5 (prostopadłej do płaszczyzny orbity i przechodzącej przez środki przeciwległych ścian) tak, że co pewien czas jest zwrócone do Słońca inną ścianą?



Ryc. 5

3) Jaką temperaturę musiałoby mieć rozważane ciało, aby umieszczone z dala od innych ciał promieniowało z mocą obliczoną w poprzednim punkcie?

Stała Stefana-Boltzmana wynosi $\sigma=5{,}67\cdot 10^{-8}$ $W\cdot m^{-2}\cdot K^{-4}$.

ROZWIĄZANIE ZADANIA T3

Możemy przyjąć, że w dużej odległości od Słońca promienie oświetlające ciało są wzajemnie równoległe. Oznaczmy przez R_o [W/m] przechodzący przez jednostkową powierzchnię strumień energii promieniowania padającego na ciało. Niech S_o oznacza całkowite pole powierzchni ciała, zaś S pole powierzchni rzutu prostopadłego (na płaszczyznę prostopadłą do kierunku padania powierzchni) oświetlonej części ciała. Ponieważ równowadze energia wypromieniowana przez ciało, w jednostce czasu, jest równa energii pochłanianej, zgodnie z prawem Stefana-Boltzmana mamy

$$S_o\sigma T^4 = SR_o \qquad (1)$$

(przyjęliśmy, że jedynie promieniowanie Słońca ma wpływ na temperaturę ciała). Dla sześcianu mamy $S_o = 6a^2$, zaś dla kuli $S'_o = 4\pi r^2$. Pole powierzchni rzutu S zależy od orientacji sześcianu względem kierunku padającego promieniowania, zaś w przypadku kuli, S' zawsze jest równe S' = πr^2. Podstawiając do równania (1) wartość S'_o i S' odnoszące się do kuli, otrzymujemy dla R_o wartość

$$R_o = 4\sigma T^4_o. \qquad (2)$$

1) Najmniejsza powierzchnia rzutu sześcianu wynosi $S_{min} = a^2$. Największa wartość S = S_{max} odpowiada orientacji, gdy przekątna sześcianu jest równoległa do kierunku padania promieni świetlnych, $S_{max} = a\sqrt{3}$. Dowolną orientację względem kierunku padania promieni światła możemy otrzymać obracając sześcian o kąt α wokół osi zaznaczonej na rycinie 5, a następnie obracając go o kąt β (α = β = 0 odpowiada S_{min}) wokół osi leżącej w płaszczyźnie orbity i prostopadłej do kierunku padania promieni świetlnych – wtedy S = S(α,β) = a^2[(cosα+sinα)cosβ+sinβ]. Korzystając z obliczonej wartości R_o (2) i podstawiając odpowiednio S_o oraz S_{max} lub S_{min} do wzoru (1) otrzymujemy następujące wartości największej i najmniejszej temperatury sześcianu:

$$T_{\max} = \sqrt[4]{\frac{R_o S_{\max}}{\sigma S_o}} = \sqrt[8]{\frac{4}{3}}T_o \approx 311 \text{ K}, \qquad (3)$$

$$T_{\min} = \sqrt[4]{\frac{R_o S_{\min}}{\sigma S_o}} = \sqrt[4]{\frac{2}{3}}T_o \approx 271 \text{ K}. \qquad (4)$$

2) W równowadze średnia moc promieniowania ciała jest równa średniej mocy światła pochłaniającego przez to ciało i wynosi
= R_o [uśredniona wartość S(α, β) po okresie τ obrotu sześcianu o kąt $\alpha = 2\pi$ przy $\beta = 0$; S($\omega t, 0$) = a^2(|cosωt|+|sinωt|)]

$$= R_o\overline{S(\omega t,0)} = R_o a^2 \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}\left(|\cos\omega t| + |\sin\omega t|\right)dt = R_o a^2 \frac{4}{\tau}\int_0^{\frac{\tau}{4}} 2\sin\omega t dt = (16/\pi)a^2\sigma T_0^4 = 23{,}4 \text{ [W]}$$

gdzie podstawiamy $\omega = 2\pi / T$.
3) Aby wyznaczyć temperaturę T ciała doskonale czarnego, promieniującego z wyżej obliczoną mocą, korzystamy z prawa Stefana-Boltzmana

$$\frac{16}{\pi}a^2\sigma T_0^4 = S_o\sigma T^4 = 6a^2\sigma T^{4,} \qquad (5)$$

skąd otrzymujemy

$$T = \sqrt[4]{\frac{8}{3\pi}}T_o \approx 288 \text{ K}. \qquad (6)$$

Źródło:
Zadanie pochodzi z „Druk OF”

Komitet Okręgowy Olimpiady Fizycznej w Szczecinie
www.of.szc.pl